EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 87

nr 3

december 2011





Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

jaargang 87

nr 3

december 2011

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394



Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen: www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,
Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Personen (niet-leden van de NVvW): € 65,00
Instituten en scholen: € 145,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00
Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
t.a.v. E. van Dijk
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal
Tel. (0318) 555 075
E-mail: e.vandijk@dekleuver.nl

Kort vooraf

[Marjanne de Nijs]

Met een kerstnummer voor u is het tijd om dit eerste deel van het schooljaar af te sluiten en – na een verdiende rustpauze – het schooljaar weer met frisse blik onder ogen te komen. Zelf kijk ik in deze periode nog even terug op mijn zomervakantie die ik, dankzij een uitnodiging, grotendeels doorbracht in Oeganda. Ik kreeg daar de gelegenheid om in de hoogste klas van de lagere school een wiskundeles bij te wonen. Het lokaal was kleiner dan dat we in Nederland gewend zijn en ik vond het opzienbarend knap dat het lukte om er 87 leerlingen in te proppen. Dit was de kleinste lesgroep van de school en het lokaal was minder volgestouwd dan de grootste die 135 leerlingen telde. Niet ongewoon in dit land. Boeken zijn er niet voor de leerlingen, alleen de docent heeft een exemplaar. De inhoud daarvan komt – in hapklare brokken – op het bord te staan. In de les die ik bijwoonde, behandelde de docent het oplossen van een lineaire vergelijking, de definitie van priemgetallen en de eerste stappen van kansrekening. Dit alles binnen een uur. Over een volgeladen programma gesproken en weinig tijd voor enige diepgang. De leraar praat, de leerlingen herhalen af en toe in koor een zin en mogen met een beetje geluk iets op het bord schrijven. Onze collega's daar werken heel hard, met veel inzet maar voor weinig geld en vaak tegen de klippen op. Gelukkig is er een opgaande lijn, er is al meer aandacht voor de didactiek en het wachten is nu op het afstuderen van nog meer bevoegde docenten. Dan kan de klassengrootte omlaag en is er meer ruimte de didactiek ook in praktijk te brengen. Met eigen ogen zag ik hoe belangrijk het is dat collega's in landen als Oeganda ondersteuning krijgen.

Ik ben dan ook blij met ons eigen Wereldwiskunde Fonds. Evert van de Vrie en Hans van de Langemaat laten in deze aflevering van *Euclides* weer eens zien hoeveel goed werk er verricht kan worden met behulp van de bijdragen aan dit fonds. Voor mij leverde het bij een ander over de grens meekijken een frisse kijk op het gebeuren in mijn eigen wiskundeles en – in dit geval – een gezonde portie relativering.

En Gert de Kleuver laat zien dat je niet zo ver weg hoeft om op te laden. Het volgen van de vakantiecursus is óók een doeltreffende methode. Hij doet verslag van de bijeenkomst van afgelopen zomer en hoopt dat het u aanmoedigt de vakantiecursus ook volgend jaar (weer) te volgen.

Gelukkig roept het lezen van *Euclides* regelmatig bij lezers een reactie op. We merken dat dan via e-mail, in persoonlijke contacten of anders. Aanvullend op ons blad is er dan ook een lezersforum dat geschikt is om meningen te geven over geplaatste artikelen en daarover met elkaar van gedachten te wisselen. Ik wil het u graag aanbevelen (via *www.nvvw.nl/euclides.html*). Soms inspireert het een lezer om zelf in de pen te klimmen. Louis Maassen las het artikel over de Algebra KIT in *Euclides* 86(3) en bij het wegleggen viel de advertentie op de achterkant van het blad hem op. Naar aanleiding daarvan kijkt hij in deze *Euclides* met ons terug op zijn eigen leservaringen.

Gerard Koolstra neemt het gebruik van de staartdeling voor het delen van polynomen onder de loep. Hij doet dit zeer zorgvuldig in een tweedelig artikel. Ook van de pennenvruchten van Nellie Verhoef kunnen we twee keer achter elkaar genieten. Zij schrijft gepassioneerd over de Lesson Study, een methode om denkactiviteiten te ontwerpen. En voor de liefhebbers: een antwoord op de vraag hoe exact we de driedeling van een hoek kunnen construeren. Ik hoor u denken 'dat was toch een onmogelijke opgave' – Chris Alberts neemt u mee in zijn wereld. Tanja Van Hecke schrijft een mooi intermezzo over wachttijd en Marjan Botke geeft concrete toepassingen voor het werken met applets. Dorien Lugt blijft ons ook dit jaar weer vermaken met haar belevenissen; we zijn blij dat ze deze weer met ons wil delen. Sieb Kemme daagt u uit in de puzzelrubriek en Ton Lecluse doet dit vanuit de oude doos. Mocht u de kerstkaarten nog niet verstuurd hebben, laat u dan inspireren door Job van de Groep, hij wenst u een goed …

Met de oprichting van het Platform Wiskunde Nederland (PWN) in het voorjaar is een belangrijke stap gezet om alle wiskunde-belangenverenigingen onder één paraplu te krijgen. Wil Schilders geeft aan waarom dat goed is en wat het gaat opleveren. Eén van de zaken waar het PWN zich sterk voor maakt, is de aansluiting tussen het po en het vo. Caroliene van Waveren en Nathalie de Weerd laten in hun artikel zien dat de kennisbases van de lerarenopleidingen van po en vo van elkaar kunnen leren.
Rest mij u een goede kerstvakantie te wensen met genoeg oplaadmomenten voor straks weer een frisse start.

Inhoud

Prospero Anno Nuovo …

[Job van de Groep]

Van een zekere Leone kreeg ik begin december vorig jaar een kaart, waarvan ik vermoed dat het om een nieuwjaarswens gaat, gezien de periode in het jaar en de laatste zin op de kaart. Ik spreek geen Italiaans, maar Italiaanse woorden zijn soms wel af te leiden. Hoewel het poststempel nauwelijks zichtbaar is, lijkt de kaart uit Pisa te komen.



96	194	145	520	88	137	357	251
376	474	425	800	368	417	637	531
60	158	109	484	52	101	321	215
24	122	73	448	16	65	258	179
148	246	197	572	140	189	409	303
8	106	57	432	0	49	269	163
236	334	285	660	228	277	497	391
44	142	93	468	36	85	305	199

1. Mettere una pedina in qualsiasi campo della scacchiera (o coprire il campo con una moneta).
2. Curva 7 altri pezzi a caso sulla scacchiera, ma in modo che alla fine in ogni riga e ogni colonna esattamente un pedone.
3. Aggiungere i numeri negli 8 campi con le pedine insieme.
4. **Un anno nuovo sofisticato** … (Prosperoso Capodanno)

Toch heb ik het gevoel dat ik in de maling wordt genomen. Als ik een vertaalprogramma loslaat op de Italiaanse tekst, blijkt die nogal krakkemikkig te zijn, zeker als ik van de vertaalde tekst weer een Italiaanse versie wil maken.
Bovendien, Leone uit Pisa? Ik ken helemaal geen Leone die in Pisa woont, hoewel…
Leonardo… Ik krijg een vermoeden. Hmm, als 'getallengoochelaar' moet je op je tellen passen…
Een 'vrije' vertaling van de tekst komt op het volgende neer:

1. Zet een pion op een willekeurig veld van dit schaakbord (of bedek het veld met een munt).
2. Zet nog 7 andere pionnen willekeurig op het schaakbord, echter zó dat uiteindelijk in elke rij en in elke kolom precies één pion staat.
3. Tel de getallen in de 8 velden met de pionnen bij elkaar op.
4. Een **uitgekiend** … (Voorspoedig Nieuwjaar)

Grappig! Het werkt! Ook als ik andere velden kies.
Inmiddels heb ik door hoe ik zelf een dergelijke kaart kan maken, met een eigen gekozen 'uitkomst', bijvoorbeeld als persoonlijk getinte verjaardagskaart. Dus zeker geschikt voor Tante Truus, die binnenkort 79 hoopt te worden. Zij kan nog goed hoofdrekenen en zal zeker ook gaan puzzelen om achter het geheim van de kaart te komen.
En waarom de kaart zogenaamd afkomstig is van ene *Leonardo van Pisa*, is me ineens ook duidelijk geworden door een bepaalde structuur die ik in specifieke getallen zie, maar die overigens niets heeft te maken met het 'systeem'.
Veel **magisch** plezier.

Over de auteur
Job van de Groep (1944) is amateur-goochelaar en was tot 2007 schooldecaan en docent wiskunde aan het Oosterlicht College in Nieuwegein. Met lesgeven begon hij in 1968 tijdens zijn studie in Leiden. Op jeugdige leeftijd is hij gefascineerd geraakt door het goochelen. Trucs met getallen hebben zijn speciale belangstelling. Hij schreef daarover het boekje *Gegoochel met getallen* (EPN; 2006), met de bedoeling collega-docenten iets in handen te geven om een ludieke draai aan een reken- of wiskundeles te geven.
Een hint nodig?
E-mailadres: *tjvdgroep@planet.nl*

Een andere kijk op het trisectieprobleem

EN DAARMEE EEN WERELDRECORD!

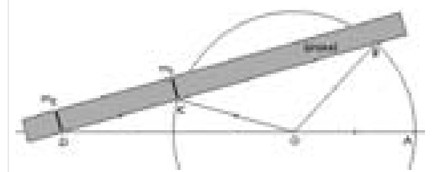
[Chris Alberts]

Voorgeschiedenis
De oude Grieken (ca. 600 v. Chr. - 500 n. Chr.) hadden meer dan een millennium behoorlijk wat wiskundig werk verzet en een ontzaglijke hoeveelheid kennis overgeleverd aan de wereld. Geometrie (meetkunde) was het terrein waar ze het meest in uitblonken. Er waren echter enkele problemen, die zelfs voor de Grieken onoplosbaar bleken; dat zijn:

- de verdubbeling van de kubus: het is niet mogelijk om *met passer en ongemarkeerde liniaal* (= p&l) een kubus te construeren met exact het dubbele volume van een kubus met gegeven maten.
- de kwadratuur van de cirkel: het is onmogelijk een vierkant te construeren met p&l, met exact dezelfde oppervlakte als een gegeven cirkel.
- de trisectie van een hoek: het is niet mogelijk om met p&l een gegeven hoek in exact drie gelijke delen te verdelen (trisectie = driedeling).

Dit artikel gaat alleen over het probleem van de trisectie van een hoek. Vele eeuwen lang hebben wiskundigen gezocht naar een euclidische constructie; dat wil zeggen een constructie met alleen p&l. Enkele van de meest invloedrijke wiskundigen die het probleem aangingen, waren de Grieken Hippias, Archimedes en Nicomedes. Het vroege werk over deze uitdaging vertoont een compleet scala aan vaardigheid, variërend van de meest zinloze pogingen, tot uitstekende benaderende oplossingen, evenals ingenieuze oplossingen, bijvoorbeeld door het gebruik van 'hogere' krommen, die echter niet aan de regels van Euclides voldeden.
Wiskundigen kwamen uiteindelijk tot de empirische conclusie dat dit probleem niet opgelost kon worden via p&l-constructies, maar dit legde een dieper probleem bloot: de noodzaak van een bewijs van de onmogelijkheid, volgens euclidische regels.
Dit bewijs, dat zowel een revolutie was in de wereld van de wiskundigen, als ook een opluchting (men hoefde niet meer te blijven zoeken), werd pas in 1837 door Pierre Laurent Wantzel via algebra geleverd. De trisectie stond vanaf toen officieel te boek als onoplosbaar…
Toch zijn er wereldwijd nog steeds een heleboel mensen (ik ook), die de uitdaging desondanks aangaan met dit klassieke probleem, zeker nu we in het digitale tijdperk aangekomen zijn, dat zijn kinderschoenen al snel aan het ontgroeien is. Men maakt steeds vaker gebruik van zich steeds sneller ontwikkelende tekenprogramma's die onmiddellijk elke afwijking, hoe klein ook, genadeloos aantonen. Een 'luxe' die men, tot zeer kort geleden, nooit heeft gehad.
Sinds de opkomst en ontwikkeling van de computer is de fanatieke jacht op elke denkbare limietbepaling in de wiskundewereld pas goed op gang gekomen. Wat mij betreft mag ook de jacht naar de meest nauwkeurige benadering van eenderde van een willekeurige hoek geopend worden, iets dat ik in dit artikel wil verduidelijken.
Als een exacte trisectie van een hoek toch niet te construeren is, dan is het beste alternatief een benadering die beantwoordt aan elke, vooraf bepaalde maat van nauwkeurigheid. Het liefst op een zo snel mogelijke en 'ambachtelijk veilige' manier. Onder 'ambachtelijk veilig' versta ik een constructie die nauwkeurig uit te voeren is, die geen punten heeft die te dicht bij elkaar liggen om een betrouwbare lijn doorheen te trekken. Een constructie die geen al te kleine details heeft, die niet precies te construeren zijn. Geen snijpunten die elkaar, door toenemende nauwkeurigheid, gaan overlappen, enzovoort. Het moet robuust en solide zijn en liefst ook simpel, uiteraard in een eindig aantal stappen.

Mijn eerdere pogingen
Zo'n twee jaar geleden kwam ik, tijdens mijn studie (lerarenopleiding wiskunde) in aanraking met het trisectieprobleem (bij het vak Geschiedenis van de wiskunde). Omdat een zó simpele uitdaging niet uitvoerbaar (b)leek, werd mijn interesse gewekt. Ik heb nooit echt moeite gehad met constructies, en besloot de uitdaging aan te gaan. Eerst heb ik enkele antieke pogingen bestudeerd om erachter te komen waarom men het trisectieprobleem op een bepaalde manier probeerde op te lossen. De meest in het oog springende, *niet*-euclidische uitvoering was die van Archimedes, de zogenoemde *neusis*-methode, een constructiemethode met gemarkeerde liniaal; ***zie figuur 1***.



figuur 1 Archimedes' trisectie

Deze constructie is in feite een *richt-oplossing*. Men heeft een gemarkeerde liniaal: twee streepjes, m_1 en m_2, op een afstand die gelijk is aan de straal van de gebruikte cirkel. De uitvoering is simpel: je legt de 'rand' van de liniaal op punt *B*. Vervolgens richt je de liniaal zó (terwijl de rand op punt *B* blijft) dat de beide markeringsstreepjes zowel de cirkelrand snijden als ook het verlengde van lijnstuk *OA*.
Hoek *ADB* = ⅓ · hoek *AOB*. Waarom is dit een echte driedeling?
De constructie blinkt uit in eenvoud en leende zich daardoor uitstekend voor mijn onderzoek.
Bijna anderhalf jaar heb ik (tussen alle bedrijven door) met p&l de meest uiteenlopende pogingen gedaan om diverse meetkundige plaatsen (bijvoorbeeld hoe verandert een middelloodlijn, als ik een bepaald punt over een cirkel laat lopen?) en bepaalde snijpunten op te zoeken om zo een 'exacte' trisectie te bewerkstelligen, totdat ik, met ambachtelijk gereedschap (passer, liniaal, vergrootglas), geen zichtbare afwijking meer ontdekken kon. De teller stond toen op een nauwkeurigheid van 4 decimalen.
Ongeveer een half jaar geleden ben ik met

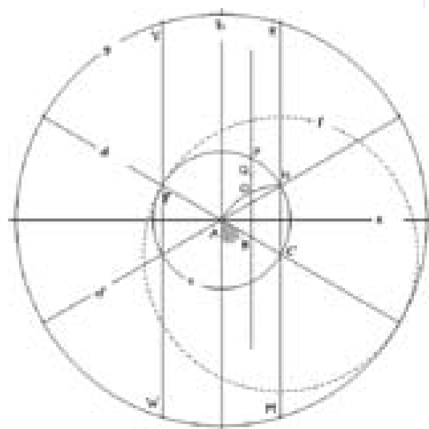
Geogebra aan de slag gegaan, om zo nauwkeurig mogelijk de constructie-afwijkingen in beeld te krijgen.

Hoe ging het verder?

Met de opgedane ervaringen in mijn achterhoofd, ben ik verder op zoek gegaan naar constructies met zogenoemde convergentie-plaatsen. Een convergentie-plaats noem ik een bepaalde lijn, cirkel of punt, waarvan ik het vermoeden had dat hij elke keer terugkeerde, als ik diverse schattingen maakte van een driedeling. Ik had er al eerder een aantal van vermoed, tijdens mijn p&l-periode. Enkele ervan heb ik weer terug kunnen vinden, maar mijn favoriet heb ik de *Alberts-verfijning* genoemd; dit is mijn eigen vondst! Deze gaat als volgt.

De constructie van de Alberts-verfijning

Deze constructie is toepasbaar op elke hoek kleiner dan 90°. ***In figuur 2*** staat een voorbeeld met een hoek van 60°.

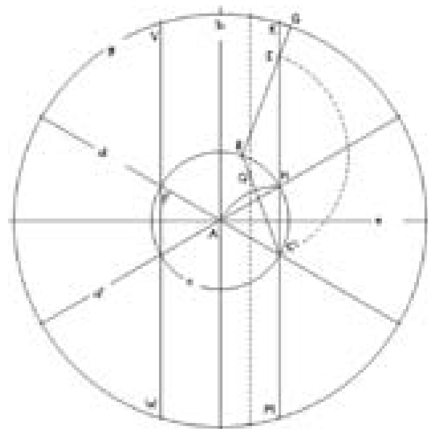


figuur 2

Eerst het sjabloon voor de trisectie maken (***zie figuur 2***):

1. Eenheidscirkel *c* met middel punt *A* en straal 1;
2. Twee assen (*a* en *b*), door *A*, loodrecht op elkaar;
3. Hoekbenen (in dit voorbeeld bij een hoek van 60°) *d* en *d'*; de snijpunten met de eenheidscirkel zijn o.a.: *C'*, *H* en *F*;
4. Cirkel *f* (middelpunt *C'*, straal 2) als maat voor cirkel *g* (middelpunt *A*, straal 3);
5. Cirkelboog *h* (middelpunt *C'*, straal *C'A*); het snijpunt met de eenheidscirkel is punt *H* (bij 60º);
6. Lijnstuk *C'H*, op een lijn evenwijdig met de *b*-as; de snijpunten van die lijn met cirkel *g* zijn *K* en *M*;
   hetzelfde met een lijn door *F*, evenwijdig met de *b*-as; de snijpunten met cirkel *g* zijn *V* en *W*;
7. Construeer het midden *N* van het lijnstuk *AC'*;
8. Trek een lijn door *N*, evenwijdig met de b-as; snijpunten *O* (met cirkelboog h) en *P* (met eenheidscirkel);
9. Construeer het midden *Q* van *OP*.

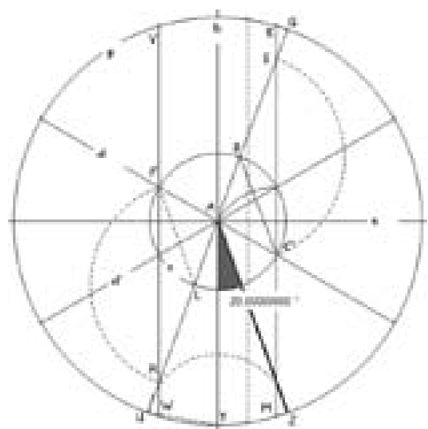
Waarom dit punt? Zie daartoe het vervolg. Zo, nu is het sjabloon klaar. We hebben nu dus een hoek van 60° in een kleine cirkel met straal 1, en die hoek moet in drieën gedeeld worden.



figuur 3

Constructiestappen (***zie figuur 3***)

1. Teken een lijnstuk door *C'* en *Q*, tot aan cirkel *c*: snijpunt *B*. Dit geeft mijn 1e benadering ($\angle BC'H \approx 20{,}61°$).
2. Pas $|BC'|$ af tot aan het andere snijpunt met de lijn *KM*: punt *E*.
3. Teken het lijnstuk door *B* en *E* tot aan cirkel g: snijpunt *G*.



figuur 4

Zie verder ***figuur 4***.

4. Trek het lijnstuk door *G* en *A* tot aan cirkel c door: snijpunt *L* (hier wordt later een 'tussenstand' opgemaakt van de nauwkeurigheid van de constructie).
5. Pas $|LF|$ af tot aan het andere snijpunt met *VW*: punt *R*.
6. Trek het lijnstuk door *L* en *R* tot aan cirkel *g*: punt *U*.
7. Pas $|YU|$ af op cirkel *g*: punt *Z* (*Y* is een snijpunt van *g* met de *b*-as).
8. Tot slot: teken het lijnstuk *AZ*.

Nu is de constructie af. De hoek die *AZ* met de *b*-as maakt, is nu 'exact' 20°! Tot ***meer dan*** 13 decimalen nauwkeurig (de Geogebra-limiet) althans.
Elke herhaling van stappen vergroot de nauwkeurigheid exponentieel, omdat telkens de benadering met dezelfde procedure verfijnd wordt (een iteratief proces dus). Veiliger en sneller kan ik deze constructie niet krijgen, wel nóg nauwkeuriger. Ik heb nog drie 'fine-tune'- stappen in petto, vóórdat de Alberts-verfijning begint: de 'ingangshoek' (de hoek van het lijnstuk *BC'* met de verticale as) kan tot meer dan 6 decimalen nauwkeurig benaderd worden, vóórdat ik deze benadering de cirkel rond laat gaan.
Twee *fine-tunes* zijn ambachtelijk zeer veilig en snel, een derde enigszins riskant. Maar dit artikel is gebaseerd op bovenstaande constructie, zonder extra fine-tuning.
Omdat ik niet meer verder de nauwkeurigheid kon bepalen van mijn constructie, ging ik op zoek naar de nauwkeurigheid van mijn constructie, buiten de 13-decimalengrens. Ik zocht contact met Rouben Rostamian, professor aan de UMBC (universiteit van Maryland) te Baltimore (Maryland, USA), een expert die zich met trisectiepogingen bezighoudt en een website beheert over diverse meetkundige onderwerpen.

Analyse: een wereldrecord

De analyse van professor R. Rostamian leidde naar een wereldrecord. Na een intensief mailcontact met prof. Rostamian, waarbij ik hem diverse constructies gestuurd heb – met toelichtingen, hier en daar – was de kogel door de kerk. Ik wist dat deze constructie vooraan in de top 10 van de beste benaderingen ter wereld terecht zou komen. Sterker nog: ik wist vrij zeker dat, als Rostamian mijn versie – ik doe eigenlijk twee constructiestappen van dezelfde soort om de 'cirkel rond' te gaan en zo weer bij de oorspronkelijke hoek uit te komen (zodat de trisectie in de goede hoek geconstrueerd wordt) – accepteerde, ik een absoluut wereldrecord op mijn naam zou hebben staan.
Na de terechte kanttekening zijnerzijds dat ik eigenlijk twee iteraties heb uitgevoerd, heeft hij tóch besloten mijn versie, en de bedoeling ervan, te accepteren als één solide constructie. Mijn constructie, zonder fine-tuning van de eerste benadering, levert een hoek, tot op 16 decimalen nauwkeurig! Volgens Rostamian (die de constructie voor de lezer op zijn website heeft aangepast;

zie [1]):
'*Let* α *and* β(α) *be the sizes of the angles AOB and AOT, respectively. Express the trisection error as e*(α) = α*/3* – β(α). *It turns out that e*(*0*) = *e*(π/2) = *0. In the range* 0 *to* π/2 *the error is the largest near* 1.22175 *radians* = 70.0013 *degrees. The maximum error is* 2.32 $\times 10^{-18}$ *radians* = 1.33 $\times 10^{-16}$ *degrees.*'
Rostamian's analyse van mijn constructie is sinds 25 maart 2011 op het internet te vinden; zie [2].
Dankzij Rostamian kunnen we nu de nauwkeurigheid van deze constructie goed in beeld krijgen. Hij stelt, en door diverse benaderingsscenario's te construeren blijkt het volgende:
Rostamian: '*… A quite straighforward calculation, involving an application of the law of sines in the triangle APG leads to the equation:* δ' = δ – *arctan*(⅓ *sin*(3δ))'.
Dit is de formule van de tussenstand. Door substitutie krijgen we de eindafwijking:
δ" = (δ – arctan(⅓ sin(3δ))) – arctan(⅓ sin(3(δ – arctan(⅓ sin(3δ)))))
Bij een invoerhoek van 20,0000006118035…° (6 decimale nullen; de meest nauwkeurige fine-tuning van lijnstuk *BC'* (***zie figuur 4***) die ik zou kunnen construeren), krijg ik een tussenstand (en dan is mijn trisectie nog niet af!) van: $20°+3{,}0533360692867\times10^{-19}$ °, hetgeen dus een minieme afwijking is.
Als ik de constructie afmaak, dan komt er een hoek van $20°+3{,}79544376325\times10^{-56}$ ° uit! Door Rostamian's analyse heb ik dit nu zelf kunnen uitrekenen:

20,00000000000000000000000000000000000000000000000000000000379544376325°

Geen wonder dat Geogebra bij 20,61° al een perfecte hoek geeft!

Astronomisch
Nu de (belachelijk abstracte) astronomische kant van deze afwijking. Stel dat de doorsnede van cirkel *g* één lichtjaar zou zijn (ca. 9.460.730.472.580.800 meter), dan zou de afwijking slechts $3{,}5908\times10^{-34}$ micron zijn!
Volgens astronomen is een grotere afstand dan 46,5 miljard lichtjaar niet nodig voor berekeningen: een groter deel van het heelal is simpelweg niet waarneembaar. Met zo een doorsnede is de afwijking slechts $1{,}67\times10^{-23}$ micron.
Over uitersten gesproken… Stel dat ik de Alberts-benadering 5 ronden laat doorlopen – als je negeert dat je met zelfs een elektronenmicroscoop geen verschillen meer zult zien… Dan heeft de benadering een fout met meer dan 56×3^8 decimale nullen, voordat de eerste cijfers verschijnen (dus 367.416 nullen…). Echt decimalengestoei dus…

Hoe exact is exact, of wanneer is het genoeg?
Omdat de benadering van een trisectie zó snel astronomisch klein te krijgen is, vind ik het tijd voor een andere visie op dit soort constructieproblemen.
Binnen de wiskundewereld kennen we, zeker in de moderne tijd, een heleboel rijen, reeksen, numerieke benaderingen en limietbepalingen.
Men kan zich gerust gaan afvragen waar de grenzen liggen van deze verschijnselen. Als π al tot in de biljoenen decimalen bekend is (5 biljoen door Alexander J. Yee; zie [3]), als het grootste priemgetal al een getal is dat door louter exponentgrootte niet meer voor te stellen of uit te spreken is ($2^{43.112.609}-1$; dit zijn 12.978.189 cijfers), als er steeds betere reeksen gebouwd worden om nog sneller naar gezochte waarden te convergeren (bijvoorbeeld de Taylor-reeksen of de Newton-Raphson-methode om nulpunten van functies te benaderen), dan zouden we de 'benadering van ⅓α' ook in dit licht mogen zien.

Als de constructie tóch niet met p&l uit te voeren is, dan zouden we net zo goed op jacht kunnen gaan naar de meest nauwkeurige benadering. In onze geschiedenis zijn er al een heleboel knappe koppen ons voorgegaan, hetzij met benaderingen (Albrecht Dürer, wiens methode slechts 0,000251° afweek van 20° door noodzakelijkerwijs klein te tekenen, of Mark Stark met zijn sublieme, doch ambachtelijk riskante constructie; zie [4]), hetzij met 'hogere krommen' (trisectrix van Maclaurin of de quadratrix van Hippias), of hulpmiddelen (neusis van Archimedes en van Hippocrates).
Als iemand mij zou vragen naar een goede trisectie-constructie, dan zou ik bovenstaande convergentie-benadering tekenen en deze als geldig presenteren, ook al vanwege de inherente onnauwkeurigheid van elke ambachtelijke constructie: door de dikte van lijnen en punten krijgen constructies nu eenmaal een bepaalde mate van onnauwkeurigheid mee.

Toch zal de charme van de zoektocht naar een zo nauwkeurig mogelijke driedeling blijven bestaan, te meer omdat het probleem gemakkelijk te formuleren is. Misschien veert er wel (binnenkort?) iemand op van zijn stoel met de kreet 'Eureka'.
Ik had het al bijna gedaan…

Noten

[1] *www.math.umbc.edu/~rouben/Geometry/*
[2] *www.math.umbc.edu/~rouben/Geometry/trisect-alberts.html*
[3] *www.numberworld.org/misc_runs/pi-5t/announce_en.html*
[4] *www.math.umbc.edu/~rouben/Geometry/trisect-stark.html*

Over de auteur

Chris Alberts is docent wiskunde aan het Metameer in Stevensbeek. Hij hoopt dit schooljaar zijn deeltijdstudie aan Lerarenopleiding wiskunde van de Fontys Hogeschool te Tilburg af te ronden. Zijn spaarzame vrije tijd besteedt hij onder andere graag aan het onderzoeken van diverse wiskundige problemen.
E-mailadres: *chrisalberts_33@hotmail.com*

Applets in de klas

JE LES VERLEVENDIGEN MET DYNAMISCHE ICT

[Marjan Botke]

In het afgelopen schooljaar hebben wij op het Montessori Lyceum Rotterdam applets in onze lessen havo-4 wiskunde B getest en zijn tot de conclusie gekomen dat applets een grote meerwaarde hebben: ze verlevendigen de lessen, de leerstof wordt beter opgenomen door de vele voorbeelden, de visuele intelligentie van de leerlingen wordt meer aangesproken, de leerlingen letten beter op in de les en de applets bieden extra handvatten voor de docent.

In de klas, enkele voorbeelden

Bij editie 10 van *Moderne Wiskunde* zijn applets gemaakt bij de boeken in GeoGebra. Wij konden in de klas applets laten zien bij het toelichten van de theorie. De leerlingen kunnen thuis ook zelf met applets werken, omdat deze zijn geplaatst in de nieuwe ICT-omgeving van *Moderne Wiskunde*. In beide gevallen is het mogelijk om oneindig te variëren in de voorbeelden.
Deze applets zijn bedoeld om theorie dynamisch uit te leggen. Ze zijn gemaakt bij de verschillende hoofdstukken en paragrafen van de boeken *Moderne Wiskunde*.
Elke applet is op dezelfde manier opgebouwd. Het beginscherm is een korte introductie waarna één of meerdere schermen volgen met dynamische afbeeldingen. Bij deze afbeeldingen is het mogelijk om met een schuifknop variabelen, verhoudingen, constanten en parameters te wijzigen of punten in de grafiek(en) te verslepen. De gevolgen hiervan zijn vervolgens direct in de grafiek of tabel te zien. Op deze manier maakt de applet de abstracte theorie visueel, concreet en inzichtelijk voor de leerling.
Maar hoe werkt dat nu in de klas?

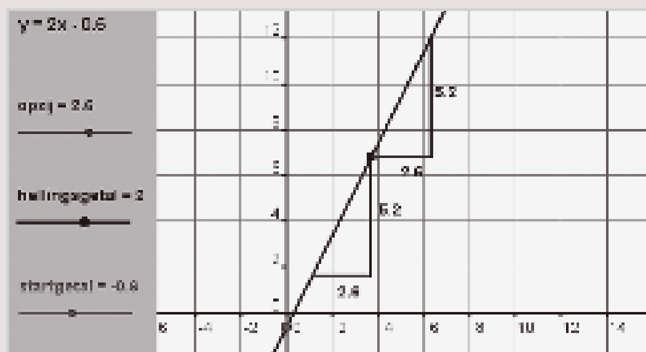
Voorbeeld 1 – Een applet bij het hoofdstuk Vergelijkingen laat zien hoe een lineaire formule is opgebouwd en hoe het hellingsgetal wordt bepaald. In de afbeelding (***zie figuur 1***) is Δx (opzij) te wijzigen, het hellingsgetal kan variëren en er kan een ander startgetal worden genomen. In de afbeelding is vervolgens direct te zien wat de wijziging voor gevolg heeft in het functievoorschrift.
Bij de uitleg over de vergelijking van een lijn is in de applet de vergelijking van die lijn direct te zien. We kunnen de schuifknoppen gebruiken om de lijn in het assenstelsel te wijzigen. De leerlingen kunnen dan direct zien welke gevolgen de wijziging heeft op de vergelijking. Op die manier zullen ze sneller zien wat de betekenis is van het startgetal en het hellingsgetal.
Door veel voorbeelden te laten zien, kunnen we vervolgens uitleggen dat een lineaire vergelijking altijd op deze manier is opgebouwd. Daarna kunnen een nog meer, zeer uiteenlopende, voorbeelden van lijnen getoond worden. Daarna kunnen leerlingen zelf voorbeelden van lijnen bedenken en zien dan welke vergelijking erbij hoort of andersom.

Voorbeeld 2 – Bij een applet bij het hoofdstuk Oppervlakte en inhoud wordt de oppervlakte van een kegelmantel berekend (***zie figuur 2***). De straal en de hoogte van de kegelmantel kunnen worden gewijzigd. De berekening laat dan ook gelijk de nieuwe uitkomsten zien. Met behulp van de afbeeldingen is het gemakkelijk om de formule voor de oppervlakte te laten ontdekken. Daarnaast is het mogelijk om met een schuifknop te laten zien welk deel van de kegelmantel in de staande kegel overeen komt met de kegelmantel die is uitgespreid. Deze applet kan heel goed gebruikt worden naast een tastbare uitslag van een kegelmantel (van papier of plastic). Als we eerst met een voorbeeld in 3D laat zien hoe een kegelmantel ontstaat uit een cirkel, kan daarna deze applet gebruikt worden op de formule voor oppervlakte en inhoud te verduidelijken. Door een aantal verschillende voorbeelden te laten zien, kunnen we laten zien dat het voor alle kegels geldt.

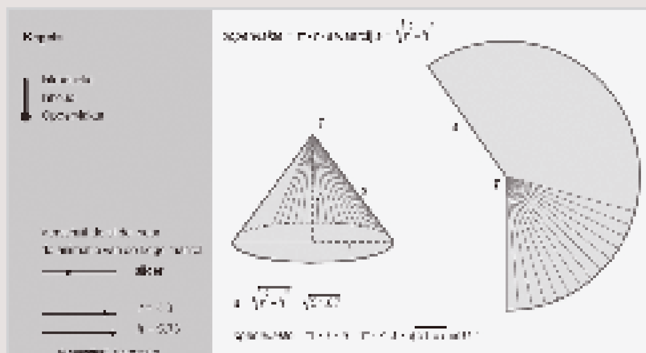
Voorbeeld 3 – De applet (***zie figuur 3***) bij het hoofdstuk Exponentiële functies laat zien op welke manier een grafiek en de bijbehorende functie veranderen als de grafiek wordt verschoven of de formule wordt vermenigvuldigd. In dit voorbeeld kan er in de afbeelding een punt worden verplaatst (de translatie) en wordt de verschuiving links in beeld getoond en daaronder wordt de formule direct aangepast.
Op deze manier wordt duidelijk welke gevolgen de verschuiving heeft voor de formule.
Door het punt (3, 1) in de grafiek te verplaatsen verandert de verschuiving van de grafiek. De leerlingen kunnen bij het functievoorschrift van de beeldgrafiek gelijk zien welke gevolgen de verschuivingen hebben. Zo kunnen ze zien dat een verplaatsing omhoog betekent dat er een getal bij wordt opgeteld. En een verschuiving naar rechts betekent dat er een getal wordt afgetrokken van de x in het functievoorschrift. Zo kunnen de leerlingen op een duidelijke manier leren hoe translaties effect hebben op het functievoorschrift en andersom.

Voorbeeld 4 – Een applet bij het hoofdstuk Functies en grafieken laat zien hoe de asymptoot bij een formule verandert als de waarden van variabelen veranderen in de formule (***zie figuur 4***). Deze applet geeft een heel goed inzicht in het verband tussen de formule en de asymptoot.
Door veel voorbeelden van verschillende gebroken functies met hun asymptoten te laten zien kunnen leerlingen het verband tussen een functievoorschrift en de bijbehorende grafiek 'zien'. Op die manier leren ze beter wat de betekenis is van een asymptoot en leren ze sneller hoe ze de asymptoot kunnen lezen uit de formule van de functie.

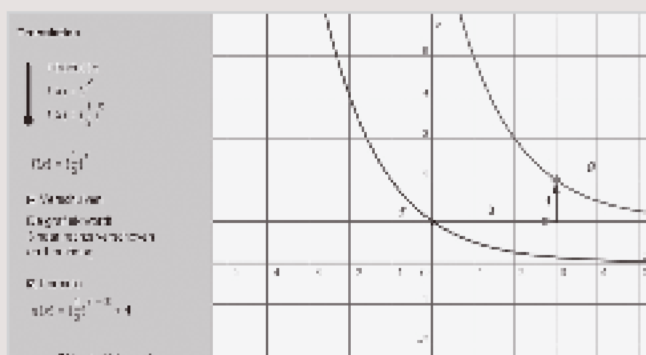
Voorbeeld 5 – Een applet bij het hoofdstuk Afgeleide functies laat zien hoe de helling tussen twee punten, de gemiddelde verandering, wordt berekend (***zie figuur 5***). De punten P en Q kunnen worden verschoven, zodat er steeds andere hellingen te zien zijn. Door de afstand tussen P en Q steeds kleiner te nemen kan ook een opstap worden gemaakt naar de helling in een punt.



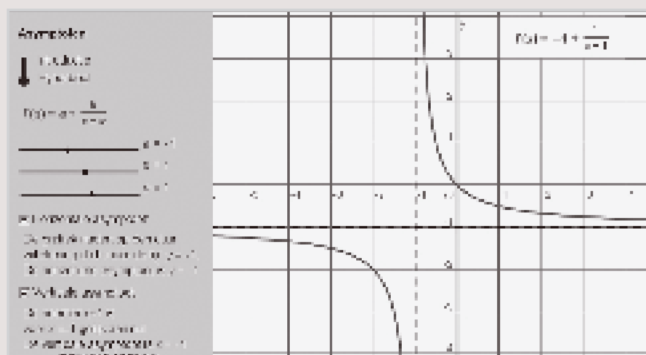
figuur 1 Applet in beginstadium van de ontwikkeling



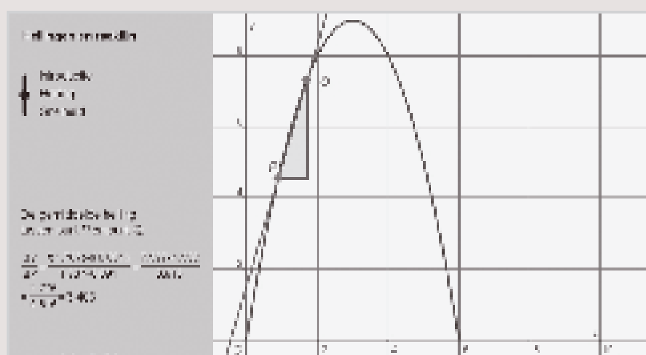
figuur 2 Bij: Oppervlakte en inhoud



figuur 3 Bij: Exponentiële functies



figuur 4 Bij: Functies en grafieken



figuur 5 Bij: Afgeleide functies

De leerlingen leren op deze manier op een snelle manier het verschil tussen de helling over een interval en de helling in een punt door deze te benaderen door een steeds kleiner interval. Ze zien de raaklijn verschijnen in de applet. In de klas waren de leerlingen hierover zeer enthousiast. De leerlingen deden veel beter mee met de klassikale uitleg en het leergesprek, o.a. omdat het tekenen van de verschillende hellingen en raaklijnen in de applet heel snel gaat. De tijd die de docent anders gebruikt om een tekening op het bord te maken, gaat niet verloren.

Conclusies

We hebben het hele jaar in havo-4 wiskunde B met de 10e editie van *Moderne Wiskunde* gewerkt met applets die daarbij beschikbaar zijn gesteld. We hebben een aantal keer lessen waarin applets werden gebruikt bij elkaar bezocht. Daaruit hebben we de volgende conclusies getrokken voor het werken met applets.

Applets maken de lessen aantrekkelijker

Door af te wisselen tussen onze uitleg en het gebruik van applets op een beamer of smartbord komt er meer variatie in een les. We konden in korte tijd heel veel voorbeelden laten zien door een knop te verschuiven of een vinkje te zetten.

De lesstof wordt beter opgenomen

De leerlingen geven aan dat de theorie echt duidelijker wordt. Ze krijgen meer inzicht. In applets kunnen veranderingen in bijvoorbeeld formules en vergelijkingen worden gemaakt. Omdat applets direct de gevolgen van een wijziging tonen, krijgen de leerlingen een beter inzicht in de effecten van de veranderingen van de parameters. In applets wordt, meer dan in het boek, het verband tussen formule, vergelijking en grafiek gelegd.
Daarnaast kunnen de leerlingen ook zelf de applets nog eens thuis bekijken om de theorie nogmaals door te nemen, en ze kunnen er mee gaan spelen om meer voorbeelden te zien. Zo kunnen ze hun eigen voorbeelden creëren die ze kunnen gebruiken bij het maken van opgaven en/of opdrachten.

De visuele intelligentie wordt meer gebruikt

Applets spreken de visuele intelligentie van de leerlingen veel meer aan dan het boek. Zo worden meer leerlingen met een visuele leerstijl bereikt. Dit hebben we gemerkt doordat de leerlingen meer feedback geven op de gegeven voorbeelden, en ze doen meer en meer inhoudelijk mee met het leergesprek in de klas. De vele voorbeelden

die een applet kan laten zien, geven heel snel een duidelijk beeld van de theorie die erbij hoort.

De leerlingen letten beter op in de les
Bewegende beelden hebben een grotere aantrekkingskracht op de leerlingen dan een tekening op het bord. De snelheid waarmee je de voorbeelden kunt tonen past ook bij hun vluchtige belevingswereld.
Het was in onze lessen opvallend dat de leerlingen tijdens het gebruik van applets meer naar de beamer keken en minder naar hun buurman/vrouw of naar buiten. De leerlingen konden tijdens het gebruik van applets ook zelf voorbeelden bedenken die we dan direct konden laten zien.
Het resultaat van de veranderingen in een functievoorschrift of variabele was dan ook direct te zien. Tijdens een les over de helling over een interval kwamen er al vragen over de helling in een punt. De leerlingen begrepen door de applet het concept van het steeds kleiner maken van een interval.

Extra handvatten voor de docent
Voor ons was en is het zeer prettig om met applets te werken; ze zien er toegankelijk uit en spreken de leerlingen aan. Daarnaast zijn de applets eenvoudig te gebruiken. Het is nog nooit zo gemakkelijk geweest om alle mogelijke voorbeelden aan de leerlingen te laten zien.

Omdat de applets bij het boek zijn geschreven, passen ze heel goed bij de methode en kunnen we ze direct inzetten bij de uitleg in de les of thuis.
En, wat er niet goed ging tijdens de test in onze lessen…
a. Voor onze leerlingen was het nog niet mogelijk om applets in een computerlokaal of thuis te bekijken. We hebben daarom ook niet kunnen testen of:
- leerlingen dan ook daadwerkelijk met applets gaan werken;
- ze applets kunnen gebruiken zonder de uitleg van de docent;
- ze applets kunnen gebruiken bij het maken van het huiswerk of andere opdrachten.

b. De naamgeving van de applets was erg onduidelijk waardoor we soms een aantal applets moesten openen voor we de juiste te pakken hadden. Dit is inmiddels aangepast: elke applet heeft nu een naam die de inhoud goed weer geeft.
c. Als we meer wilden uitleggen dan de theorie in het boek, moesten we zelf in GeoGebra aan de slag, want het is niet mogelijk om aanpassingen in applets te maken.
d. Het uploaden van applets kost bij ons op school soms veel tijd. Dan heb je weinig profijt van de tijdwinst van applets. Leerlingen (en docenten) hebben weinig geduld wat dat betreft.

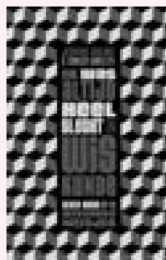
Wij vinden applets een zeer goede uitbreiding op de leermiddelen en de moeite waard om er mee door te gaan. Het heeft een absolute meerwaarde voor ons als docent en voor de leerlingen!

Zelf de applets bekijken
Bij het hoofdstuk Periodieke functies is een demo-hoofdstuk met applets te bekijken op: *http://modernewiskunde.onlinedemo.noordhoff.nl/*
(Gebruikersnaam: demo-mw / wachtwoord: Noordhoff).
Klik op havo 4 B en ga naar het tabblad Theorie en bronnen. Kies vervolgens een animatie en de applet start op.
Docenten die het docentenmateriaal van *Moderne Wiskunde* 10e editie hebben en leerlingen die een inlogcode hebben voor schoolwise bij de 10e editie, kunnen gelijk aan de slag met een aantal applets bij het boek havo-4 wiskunde B. Ze staan bij het boek Havo 4 Wiskunde B onder het tabblad Theorie en bronnen - animatie.

Over de auteur
Marjan Botke is sectievoorzitter en docent wiskunde op het Montessori Lyceum Rotterdam. Daarnaast heeft ze zitting in de werkgroep havo/vwo van de NVvW en in de onderwijscommissie van PWN.
E-mailadres: *btk@rml.nl*

Verschenen / Ik was altijd heel slecht in wiskunde

Ondertitel:
Reken maar op de wiskundemeisjes
Auteurs: Jeanine Daems, Ionica Smeets
Uitgever: Nieuwezijds B.V. ,
Amsterdam (2011)
ISBN13: 9789057123368
Prijs: € 19,95 (206 pagina's, paperback)



Van de achterpagina – Hoe kun je het getal pi benaderen met tandenstokers? Hoe rekenden de Babyloniërs? Zijn er wel normale getallen? Hoeveel is een triljoen eigenlijk? Hoe bereken je de ware liefde? Wat is het vermoeden van Kepler? En wat is binair rekenen eigenlijk?
Ook voor iedereen die altijd heel slecht in wiskunde was, is er nu dit boek van de wiskundemeisjes. Over alles wat leuk en interessant is aan wiskunde, voor mensen met of zonder wiskundeknobbel.
Lees en leer alles over veelvlakken, getallen, kansrekenen, codes en grafen, logica, meetkunde, getaltheorie en rekenkunde. Vol kleurige illustraties en met een heleboel tips, knutselprojecten, puzzels en 'vallende sterren'.

In de pers – 'Het geheel ademt de enthousiaste sfeer van het weblog dat wiskundemeisjes Smeets en Daems jaren hebben onderhouden. Wiskunde, is ook hier de boodschap, is misschien niet makkelijk, maar wel veel lolliger dan je denkt. **** (vier sterren)' - *de Volkskrant.*



Vakantiecursus 2011

[Gert de Kleuver]

Op de Vakantiecursus, georganiseerd door het CWI, in samenwerking met de NVvW, was het thema dit jaar *Symmetrie*. In de aankondiging stond 'toegankelijk voor wiskundedocenten van elk niveau'. Als je dit beweert, dan moet het programma van zeer goede kwaliteit zijn, omdat je toch iedere deelnemer van de Vakantiecursus een goed programma wilt aanbieden. Lees maar verder om erachter te komen of dat gelukt is.



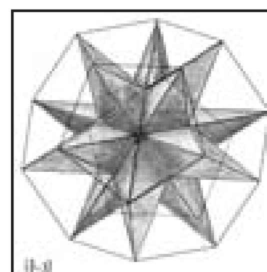
foto 1 Vakantiecursisten 2011

Zoals in voorgaande jaren noemde ik in de kop van mijn verslag altijd even alle sprekers. Die traditie wil ik in stand houden: prof. dr. Jan Aarts, prof. dr. Bas Edixhoven, dr. Hessel Posthuma, dr. Walter van Suijlekom, prof. dr. Jan Hogendijk, dr. Vincent van Noort, dr. Jeroen Spandaw en Martin Kindt.
De voorzitter van de programmacommissie, prof. dr. Jan Wiegerinck, heette op 26 augustus 2011 alle bezoekers in Amsterdam hartelijk welkom. Dit jaar was het door een verbouwing aan het auditorium in Eindhoven niet mogelijk om de cursus daar ook te houden. Daardoor was er wel een zeer grote opkomst in Amsterdam. Wiegerink speelde daarop direct in door voorzichtig te opperen dat in de toekomst het misschien wel mogelijk zou zijn om alleen in Amsterdam de cursus te houden. We zullen het volgend jaar ervaren hoe deze opmerking is uitgewerkt.
De tweede opmerking die gemaakt werd, was de reden van de afwezigheid van de altijd geroemde boekwinkel. Men had de datum van de Vakantiecursus verkeerd in de agenda gezet. Volgend jaar hoopt men weer aanwezig te zijn. Veel bezoekers van de cursus gaan juist beladen met boeken naar huis. Gelukkig was er wel een stand van de NVvW; Elly en Pim van Bemmel deden goede zaken voor de vereniging.

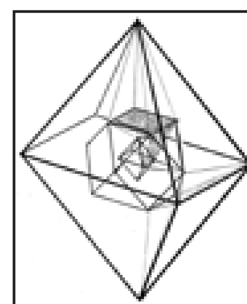
En dan nu uit het rijke en mooie onderwerp symmetrie een verslag van de 'tweedaagse'. Ik heb veel medewerking ontvangen van Jan Aarts en Jan Hogendijk. Zij hebben beiden originele illustraties voor dit verslag ter beschikking gesteld (enkele daarvan, maar dan in kleur, zijn ook terug te vinden op de NVvW-website [1]). Dit materiaal had ik nodig om aan u, de lezer, duidelijk te maken dat de cursus voor iedereen toegankelijk was. De sprekers hadden dit jaar allen een zeer goed inhoudelijk verhaal, en wel zo dat het voor iedereen begrijpelijk bleef.

Ik start dit jaar met Jan Aarts. In zijn geschreven aankondiging stonden al met de hand ingekleurde plaatjes. Dit keer besprak hij de symmetrie van platonische lichamen. Het werd heel interessant toen Jan ons liet zien dat in hogere dimensies er minder regelmatige figuren zijn dan we misschien wel zouden verwachten. Het verhaal was goed opgebouwd. Eerst een enkele definitie met daarbij begrijpelijke toepassingen.
Om te noemen: een tetraëder (een viervlak) kan men weergeven als {3, 3}, namelijk 3 hoekpunten en in elk hoekpunt komen 3 vlakken bij elkaar. Zo is een octaëder {3, 4}, een figuur met 3 hoekpunten waar 4 vlakken in elk hoekpunt bijeenkomen. Volgens Plato dus de elementen vuur en lucht. De ouderwetse oefeningen of opgaven kwamen ook weer te pas. Jan liet de zaal oefenen met een tetraëder die wentelde om de verschillende assen. Als mijn omschrijving hierboven wat uit de losse pols is, moet u dat niet Jan aanrekenen maar de schrijver van dit verslag.
Na een goede uitleg werd het spannend toen Jan een dodecaëder toonde. Jan had zelf de vlakken ingekleurd. Dat was heel goed te zien en het werd er zo leuk door. In de dodecaëder werden ook weer de symmetrieassen gezocht en natuurlijk gevonden. Hopelijk komt de illustratie goed over (***zie figuur 1***). In de syllabus (op pagina 11) schrijft Jan het volgende hierover:
Nu dit alles is vastgesteld, komen we even terug op de bewering dat de symmetriegroep van de dodecaëder 120 elementen heeft. Het aantal even permutaties van de vijf kubussen is 60, en we hadden al 60 rotaties. Er is dus een bijectie tussen verzamelingen van de rotaties enerzijds en die van de even permutaties van 5 kubussen anderzijds. Deze bijectie is zelfs een isomorfisme! De ondergroep van de rotaties heeft 60 elementen en dus heeft de symmetriegroep er 120.
Jan gaf als toegift een 24-octaëder in de $\mathbf{R}^4$ (***zie figuur 2***), een lichaam dat met zichzelf duaal is. En zo ging het verder. Maar het voert hier té ver om het gehele verhaal weer te geven. Hopelijk beleeft u er nu al net zoveel plezier aan door nog eens naar de illustraties te kijken (***zie figuur 3***), en misschien schaft u de syllabus alsnog aan.

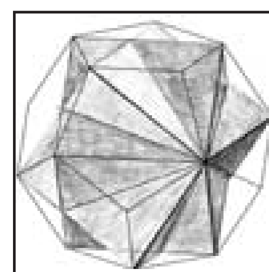
Een tweede spreker die ik naar voren wil halen, zonder de andere sprekers te kort te willen doen, is Vincent van der Noort.



figuur 1 13-x-gesterde dodecaëder (bron: zie [2])

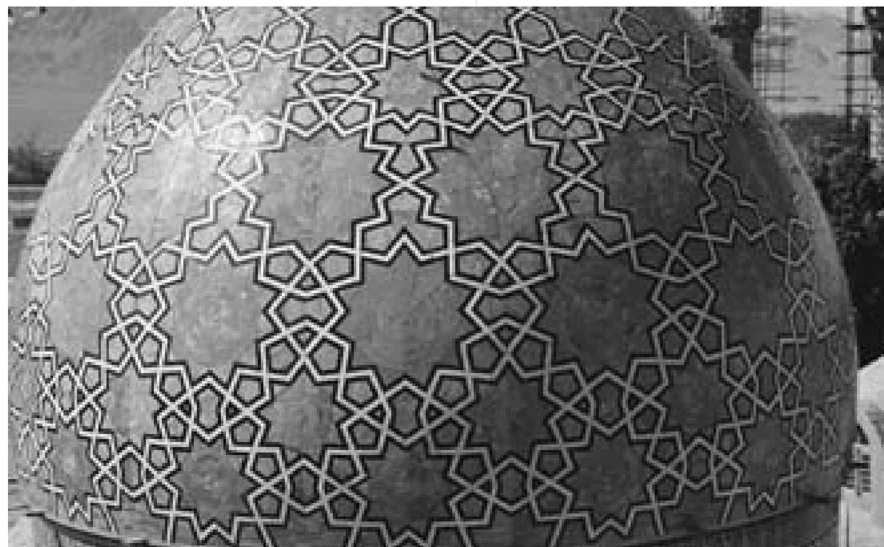


figuur 2 24-octaëder (bron: zie [2])



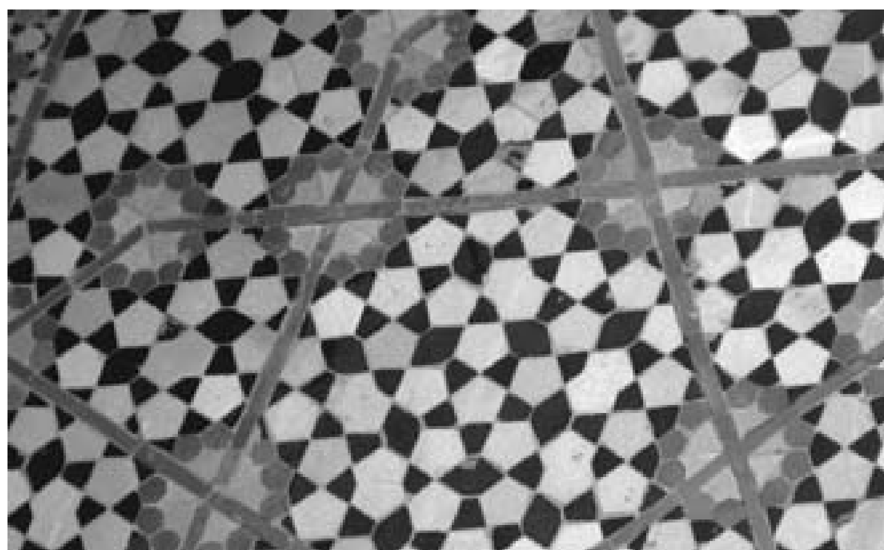
figuur 3 Twee kubussen (bron: zie [2])

Hij heeft veel uit zijn eigen boek *Getallen zijn je beste vrienden* besproken.
Het verhaal in de syllabus is een mooi verhaal over Hamilton en over quaternionen. Alleen tijdens zijn lezing ging hij een heel andere kant op. Hij definieerde de dimensies. Hij gaf voorbeelden en deed met de zaal het spelletje boter, kaas en eieren in een 4-dimensionale ruimte. Ja, hoe moet u het voorstellen? Je moet het meemaken en ervaren. Hopelijk komt hij over enige jaren weer terug met weer zo'n mooi onderwerp. (Enkele jaren geleden heeft Vincent de zaal ook helemaal meegekregen door de 'eerlijkheid' van de uitslag van verkiezingen aan te tonen. Misschien herinnert u nog dat we over bloemkolen, spruiten en dergelijke gestemd hebben).



figuur 5 Koepel in Mahan (detail)

Als laatste wil ik Jan Hogendijk noemen. Jan is een echte verteller. Daarbij toonde hij bij dat mooie verhaal heel veel mooie illustraties. De indeling van zijn betoog bestond uit drie onderdelen: Vlakke betegeling, Koepels en Muqarnas.
Vlakke betegelingen werden getoond uit het Alhambra in Granada. Daar is de kunst vooral gebaseerd op regelmatige zes- en achthoeken. Dit keer werd niet een kwalificatiesysteem genoemd. (Daarvoor verwijs ik naar de syllabus van 2004, waarin Jan van de Craats een kwalificatiesysteem uitlegt.)
We zagen nu door de mooie plaatjes dat er veel symmetrie te vinden is in de mozaïeken.
In Iran en aangrenzende gebieden hadden de ontwerpers een voorliefde voor de vijf- en tienhoek. Patronen met regelmatige zeven-, negen-, elf- en dertienhoeken zijn zeldzaam. In de Iraanse stad Isfahan zijn heel mozaïeken te vinden. Jan liet een detail van mozaïek in de Darb-i Imam uit Isfahan zien: in kleur heel mooi (***zie figuur 4***).
Hij toonde ook de bekendste koepel op het graf van de soefi-heilige Shah Nematollsh Vali (1330-1431) in Mahan (***zie figuur 5***).
Als je het tot je door laat dringen, is het een heel knappe constructie om zo'n koepel te maken.
Als laatste werd een andere 3-dimensionale geometrische kunstvorm behandeld: de *muqarnas*. Het gaat hierbij om de overgang te maken van verticale muren van een vierkant gebouw naar een ronde koepel (***zie figuur 6***). Het is een soort stalactietengewelf. Ook hiervan liet hij voorbeelden zien. Zelf ben ik door de plaatjes verder gaan zoeken naar de wiskundige achtergrond achter deze plaatjes. Zeer de moeite waard. Want ja, er komen toch wel vragen boven bij zo'n presentatie. Zoals: Welke wiskunde zit hier nu achter? Waren er bouwtekeningen? Vragen die zo voor de hand liggen en waarop ook antwoorden te geven zijn.
Volgens Jan moet er veel wiskunde achter, of beter onder de patronen liggen. Probeer maar eens een patroon te ontwikkelen. Anderen beweren dat er geen methode was. Men liet zich inspireren door een godheid. Tja, een ontwerp met de computer is tegenwoordig mogelijk, maar is die computer niet geprogrammeerd? Volgens Jan is er weinig literatuur over dit onderwerp bekend.
De tweede vraag kan bevestigend worden beantwoord. Er is een bekende werktekening, de zogenaamde Topkapi boekrol. Deze is in een facsimile editie verschenen. De Topkapi rol bevat geen tekst. Het zijn alleen maar figuren zonder tekeninstructies. Zo'n patroon/tekening wordt getoond. De rol wordt bewaard in de bibliotheek van Instanbul. Hij is zelfs gedeeltelijk op internet beschikbaar.[3] En natuurlijk bevat de site van Jan Hogendijk veel informatie.[4]
Wil je nog iets extra weten van muqarnas, dan kun je via een zoekmachine snel een goede site vinden, bijvoorbeeld die van de Heidelbergse universiteit [5].



figuur 4 Vlakke betegeling Darb-i Mam, Isfahan



figuur 6 Vrijdagmoskee in Isfahan

Mijn conclusie is dat het programma écht voor iedereen toegankelijk was, omdat de sprekers juist een betoog hebben gehouden naast, of beter ter ondersteuning van hun tekst uit de syllabus.
Ik hoop dat er volgend jaar weer velen de Vakantiecursus zullen bezoeken.

Noten

[1] Bereikbaar via: *http://www.nvvw.nl/page.php?id=8639#873*
[2] Jan. M. Aarts (2010): *Topologie door zien*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.
[3] Ik noem:
- *www.saudiaramcoworld.com/issue/200905/the.tiles.of.infinity.htm*
- *www.ee.bilkent.edu.tr/~history/geometry.html*

[4] Zie: *www.jphogendijk.nl/publ.html*
Na de Vakantiecursus zijn daarop twee nieuwe pdf-bestanden geplaatst (‘Enkele achtergronden van Islamitische mozaieken’):
- *www.jphogendijk.nl/talks/mozaieken.pdf*
- *www.jphogendijk.nl/talks/mozaieken2.pdf*

[5] Zie: *www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/ngg/Muqarnas/*

Over de auteur
Gert de Kleuver is afdelingsleider op het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *g.de.kleuver@gmail.com*

MEDEDELING / CENTRALE EXAMENS 2012

Rooster wiskunde, 1e tijdvak

schooltype	CE
vwo B	woensdag 16 mei 13:30u – 16:30u
vmbo KB	maandag 21 mei 13:30u – 15:30u
vmbo GL / TL	maandag 21 mei 13:30u – 15:30u
vwo A / C	dinsdag 22 mei 13:30u – 16:30u
havo A	woensdag 23 mei 13:30u – 16:30u
vmbo BB	donderdag 24 mei 9:00u – 10:30u
havo B	donderdag 24 mei 13:30u – 16:30u

Bron: www.examenblad.nl (kenmerk: CVE-100755, 15 juli 2010)

2e tijdvak
In maart 2012 wordt bekendgemaakt op welke dagen en tijdstippen de centrale examens in het *tweede* tijdvak worden afgenomen.
De examenafname van de aangewezen vakken door de staatsexamencommissie zal op 22 juni 2012 plaatsvinden. Het besluit welke vakken dit zijn, wordt eveneens in maart 2012 bekend.

Examenbesprekingen
Het schema van de door de NVvW georganiseerde regionale besprekingen van de examens in het 1e tijdvak wordt na gereedkomen gepubliceerd op de website van de vereniging (*www.nvvw.nl*).

Website – Examenforum
Zie voor actuele informatie de website van de NVvW (*www.nvvw.nl*).

Delen van veeltermen met en zonder staart

DEEL 1

[Gerard Koolstra]

Staartdeling

In haar artikel *De staartdeling is nooit weg geweest* (in *Euclides* 84(7), pp. 253-255) laat Lonneke Boels zien dat de voor velen vertrouwde staartdeling en de bij sommigen onbeminde hapmethode (in zijn meest korte vorm) qua uitvoering en notatie erg op elkaar lijken (***zie figuur 1***).

figuur 1 Deling volgens de nieuwe notatie (A) en
diezelfde deling met een staartdeling (B).
Bron: Euclides 84(7), pag. 254.

In het vervolgonderwijs komt deling van veeltermen af en toe ter sprake. Omdat de staartdeling in zijn oorspronkelijke vorm door leerlingen vaak niet meer herkend wordt, besteedt menig docent (in vo en ho) redelijk wat aandacht aan opdrachten zoals het herleiden van $\frac{2z^3-3z^2+2}{z^2-1}$ tot $2z-3+\frac{2z-1}{z^2-1}$. Een aanpak via een staartdeling is te zien ***in figuur 2***.

Hoe zou een aanpak met de nieuwe notatie eruit kunnen zien?
Ik denk zoals ***in figuur 3***. De verschillen zijn marginaal. Afgezien van een andere 'belijning' is eigenlijk het enige verschil dat de twee termen $2z$ en -3 eerst apart en vervolgens samen (opgeteld) verschijnen. Misschien is deze variant het proberen waard.
Overigens zijn er voor de traditionele staartdeling diverse notaties en namen in omloop. In Angelsaksische landen spreekt men van de *long division.* Deze wordt vaak vormgegegeven zoals ***in figuur 4*** waarbij het antwoord van de deling (zonder rest) boven het deeltal wordt geplaatst. In Vlaanderen spreekt men vaak een *euclidische deling.* Deze kan er uitzien zoals ***in figuur 5*** (de stappen zijn hier weggelaten). Het antwoord (zonder rest) komt hier vlak onder de deler te staan. De deling via 'happen' wordt trouwens in het Engels aangeduid met *partial quotiënts division.*
Ook in de gevoerde procedure zijn opmerkelijke verschillen te zien. Vergelijk de figuren 5 en 6 maar eens. ***In figuur 6*** is een 'zuinige' aanpak te zien waarbij steeds één nieuwe term bij de deling wordt betrokken. ***In figuur 7*** wordt steeds het hele restant bij de rest van de procedure betrokken.

Tabelmethode

Een iets andere invalshoek bij het herschrijven van quotiënten van veeltermen is om, qua notatie en hulpmiddelen, zoveel mogelijk aan te sluiten bij de vermenigvuldiging. Een bekend model voor de vermenigvuldiging van veeltermen is de tabel; ***zie figuur 8***. In elke cel van de tabel komt een deeluitkomst, waarna overeenkomstige termen worden samengevoegd (opgeteld). Bij het *ontbinden in factoren* wordt de tabelaanpak ook wel toegepast. Waarom niet met delen? Een ontbinding in factoren hoort immers bij een deling zonder rest. Het delen is alleen makkelijker dan ontbinden in factoren, omdat je een van de factoren al weet.
Als eerste voorbeeld nemen we $\frac{2x^3-7x^2+10x-8}{x-2}$, een deling die 'uitkomt'.
Er geldt dus:
$2x^3 - 7x^2 + 10x - 8 = (x - 2) \cdot p(x)$
waarbij $p(x)$ een veelterm van de tweede graad is.
De bijbehorende vermenigvuldigingstabel ziet er aanvankelijk uit zoals ***in figuur 9*** (de met de letters a, …, i aangeduide vakjes zijn leeg). Het beoogde resultaat van de vermenigvuldiging (het deeltal dus) hebben we onder de tabel gezet.
Vakje a kan nu meteen ingevuld worden: $2x^2$, en vervolgens ook vakje g: $-4x^2$ (***zie figuur 10***). Bij het vermenigvuldigen van dergelijke veeltermen met een tabel staan de tussenuitkomsten van de zelfde graad diagonaal. Vakje e moet daarom samen met het zojuist ingevulde vakje g de term $-7x^2$ opleveren. In vakje b moet dus $-3x^2$ komen te staan (***zie figuur 11***). Deze *compensatie*-aanpak is de pendant van het aftrekken in de hiervoor besproken delingsalgoritmen.
Met deze aanpak is de rest van de tabel snel in te vullen.
Wanneer de deling niet mooi uitkomt, zoals bij $\frac{2x^3-7x^2+10x-5}{x-2}$, is een extra vakje nodig voor de rest (***zie figuur 12***). Immers:
$2x^3 - 7x^2 + 10x - 5 = (x - 2) \cdot (2x^2 - 3x + 4) + 3$
Misschien is het verstandig om het woord 'rest' boven dit vakje te zetten.
Laten we eens kijken hoe de deling waarmee we het artikel begonnen, $\frac{2z^3-3z^2+2}{z^2-1}$, eruit zou kunnen zien met deze aanpak.
Opvallend is dat zowel in teller als noemer een eerstegraads term ontbreekt. Bij eerder besproken methoden wordt bij het *deeltal* een term of een extra ruimte toegevoegd.
Bij de tabelaanpak is van belang dat we niet niet zomaar deeluitkomsten diagonaal kunnen optellen (***zie figuur 13***). Wanneer we de uitkomst van de vermenigvuldiging, $2z^3 - 3z^2 - 2z + 3$, vergelijken met de beoogde uitkomst, $2z^3 - 3z^2 + 2$, zien we dat er $2z - 1$ moet worden toegevoegd; dat is dus de rest.
Als derde voorbeeld nemen we $\frac{x^5-p^5}{x-p}$.
Voor wie de uitdrukking niet herkent, kan het uitdelen een heel karwei zijn met veel lege plaatsen (***zie figuur 14*** voor een uitwerking met $p = 2$).
Omdat meteen duidelijk is dat het antwoord (afgezien van een mogelijke rest) een vierdegraads vorm is, die mogelijk uit 5 termen bestaat, starten we met een flinke tabel; ***zie figuur 15***. Het invullen gaat verder vlot, en de procedure neemt relatief

figuur 2

figuur 3

figuur 4

figuur 5

figuur 6

figuur 7

figuur 8

figuur 9

figuur 10

figuur 11

figuur 12

figuur 13

weinig ruimte in; ***zie figuur 16***.
De deling geeft geen rest, dus kunnen we concluderen dat:

$$\frac{x^5-p^5}{x-p}=x^4+px^3+p^2x^2+p^3x+p^4=$$
$$=\sum_{k=0}^{4}(p^k\cdot x^{4-k})$$

Een vierde voorbeeld. We delen de uitkomst van de vorige deling (nogmaals) door $x-p$. ***In figuur 17*** staat de 'tabelaanpak'. Resultaat:

$$\frac{x^4+px^3+p^2x^2+p^3x+p^4}{x-p}=$$
$$=x^3+2px^2+3p^2x+4p^3+\frac{5p^4}{x-p}$$

Voor $p = 1$ geeft dit:

$$\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x-1}=$$
$$=x^3+2x^2+3x+4+\frac{5}{x-1}$$

Het werken met vermenigvuldigingstabellen zal voor menig docent even wennen zijn, maar een en ander kan mooi aansluiten op het gebruik daarvan in de onderbouw.

Het tweede deel van dit artikel verschijnt in een volgend nummer van *Euclides*.

figuur 14

figuur 15

figuur 16

figuur 17

Over de auteur
Gerard Koolstra is docent wiskunde aan het St. Michaël College in Zaandam.
E-mailadres: *g.koolstra@chello.nl*

Twee impulsen tot reactie

[Louis Maassen]

De impulsen tot deze reactie waren: het artikel over AlgebraKIT en de vetgedrukte kreten op het achterblad, beide in *Euclides* jaargang 86, nummer 3.

Inleiding

Volgens mijn (niet meer zo betrouwbare) geheugen heb ik als gymnasiast kwadratische drietermen $x^2 + bx + c$ (b, c in **Z**) leren ontbinden zoals AlgebraKIT [1] dat aanbiedt: ontbind c op alle mogelijke manieren in twee gehele factoren en zoek/vind dát paar gehele factoren dat b als som heeft.

Als u en v die twee gehele factoren waren: $u \cdot v = c$ en $u + v = b$, dan konden we de vierkants-vergelijking:

Voor welke reële getallen x is : $x^2 + bx + c = 0$?

oplossen, want $x^2 + bx + c = 0$ heeft dezelfde oplossing(sverzameling) als $(x + u) \cdot (x + v) = 0$, en dus dezelfde als $x = -u$ of $x = -v$, te weten $\{-u, -v\}$.

Al in de eerste jaren van mijn leraarschap aan een school voor HBS en Gymnasium (1947-1975) heb ik gemerkt dat leerlingen wel eens de pech hadden nu net dat ene effectieve paar factoren over te slaan: niet geheel onbegrijpelijk als c gelijk is aan (bijvoorbeeld) 504; 504 heeft vierentwintig van zulke paren factoren; voor mij voldoende reden een andere werkwijze te suggereren.

Splitsen

Hier volgt een schets van een les.

Vuistregel: Een vierterm met de eigenschap: *het product van twee van zijn termen is gelijk aan het product van de andere twee termen*, is het product van twee tweetermen.

Kijk maar: $ab + pq + aq + bp$ (eerste × tweede term = derde × vierde term). *Dus*:

$ab + aq + pq + bp = a \cdot (b + q) + p \cdot (b + q) = = (a + p) \cdot (b + q)$

ofwel:

$ab + pq + aq + bp = ab + bp + pq + aq = = b \cdot (a + p) + q \cdot (a + p) = (a + p) \cdot (b + q)$

Merk op: één van het ene paar termen samen nemen met één van het tweede paar.

Dat gaan we gebruiken om de drieterm $ax^2 + bx + c$ (a, b, c in **Z**, $a \neq 0$) te schrijven als het product van twee tweetermen.

Vier voorbeelden

I. $5x^2 + 13x + 6 = ?$

Splits (zo mogelijk) $13x$ in tweeën zó dat het product van die twee delen gelijk is aan $5x^2 \cdot 6$ ($= 30x^2$). Welnu:

$13x = 12x + 1x$ (mis!) ; $13x = 11x + 2x$ (mis!) ; $13x = 10x + 3x$ (hebbes!). Dus:

$5x^2 + 13x + 6 = 5x^2 + 10x + 3x + 6 = 5x(x + 2) + 3(x + 2) = (5x + 3) \cdot (x + 2)$

II. $7x^2 – 54x + 72 = ?$

$54x$ splitsen in twee delen die als product hebben $504x^2$; omdat $504x^2$ positief is, moeten die twee delen beide een minteken hebben:

$-54x = -53x – 1x$; $-54x = -52x – 2x$; dat schiet niet op, we maken een sprong:

$-54x = -44x – 10x = \ldots = -40x – 14x$; die laatste sprong blijkt te groot; $-54x = -42x – 12x$ (jawel hoor! $42 \cdot 12 = 504$). Dus:

$7x^2 – 54x + 72 = 7x^2 – 42x – 12x + 72 = 7x(x – 6) – 12(x – 6)= (7x – 12)(x – 6)$

III. $7x^2 + 55x – 72 = ?$

$+55x$ splitsen in twee termen die als product hebben $-504x^2$; die twee delen dienen verschillend teken te hebben: we verdelen $55x$ nu uitwendig (en niet inwendig zoals zojuist $-54x$ en $13x$ gesplitst zijn) ; $55x = 56x – 1x = 57x – 2x = \ldots = 65x – 10x$ (die sprong is te groot!).

$55x = 64x – 9x = 63x – 8x$ (hoera! $63 \cdot -8 = -504 = 7 \cdot -72$). Dus:

$7x^2 + 55x - 72 = 7x^2 + 63x - 8x - 72 = 7x(x + 9) - 8(x + 9) = (7x - 8)(x + 9)$
IV. $7x^2 - 166x - 72 = ?$
$-166x = -167x + 1x$ (mis! hun product is in absolute waarde te klein) ; $-166x = -168x + 2x$ (ook mis! te klein!) ; $-166x = -169x + 3x$ (ook mis! hun product is in absolute waarde te groot).
Conclusie: $7x^2 - 166x - 72$ is *niet* het product van twee factoren $kx + l$ en $mx + n$ waarin k, l, m, n, gehele getallen zijn. Langs die weg kunnen we [Voor welke reële x : $7x^2 - 166x - 72 = 0$?] dus *niet* oplossen.

Hierop volgden opgaven waarmee de leerlingen zich deze methode eigen konden maken: vierkantsvergelijkingen oplossen (binnen de verzameling **R**). Ook daarbij spoorde ik mijn leerlingen aan het oplossingsprocédé in deze vorm op te schrijven:
$x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)\ (x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ of $x = 5$
en:
$2x^2 + 9x + 10 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 4x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ of $x = -\frac{5}{2}$
'$\Leftrightarrow$' uit te spreken als 'is equivalent met', of als 'heeft dezelfde oplossingsverzameling als', of als 'dan en alleen dan als'.

Priemfactorontbinding

Aan de prestaties van leerlingen met die splitsingsmethode heb ik aanzienlijk betere herinneringen dan aan hetgeen zij bereikten met wat ik nu maar noem de AlgebraKIT-methode. Die splitsingsmethode heeft nóg een voordeel: de coëfficiënt van het kwadraat hoeft niet 1 te zijn, zoals de voorbeelden van AlgebraKIT en die van schoolboeken lijken te suggereren.
Daaruit durf ik niet te concluderen dat de ene manier beter is dan de andere; misschien is het de moeite waard de leerlingen *de priemfactorontbinding van de gehele getallen* als nuttige toepassing te leren gebruiken; en misschien is dít het streven van Martijn Slob, die de leerlingen bovendien uitdaagt niet méér aanwijzingen te willen hebben dan zij zelf nodig achten (à la Ton Lecluse).
In gevallen van zulke keuzekwesties heb ik telkens gehandeld naar de stelregel: *Bied bij twijfel beide methoden aan; laat de keuze aan elke leerling persoonlijk.*

Kwadraatafsplitsing

Schets van een van de volgende lessen.
We weten nu dat we sommige vierkantsvergelijkingen kunnen oplossen door middel van ontbinding in factoren (van het linkerlid als het rechterlid 0 is).
Bijvoorbeeld: $x^2 + 4x + 3 = 0$ dan en alleen dan als $(x + 3)(x + 1) = 0$ (enzovoorts).
Maar: $x^2 + 4x + 1 = 0$ dan en alleen dan als $(x + ?)\ (x + ?) = 0$.
Er zijn geen *gehele* getallen a en b met de eigenschap: $a + b = 4$ én $a \cdot b = 1$.
Merk op dat er wel twee *reële* getallen met die eigenschap bestaan. Kijk maar:
$(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$ en $(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 1$
Dus: $x^2 + 4x + 1 = 0$ dan en alleen dan als $(x + (2 + \sqrt{3})) \cdot (x + (2 - \sqrt{3})) = 0$ (enzovoorts).
Wie denkt: '*Hoe verzin je zoiets? Dat kan ik niet!*' hoeft zich niet te schamen. *Dááraan moeten we nu aandacht besteden. We gaan de vierkantsvergelijkingen* (binnen de verzameling van de reële getallen) *een beetje anders bekijken. Ter inleiding een aantal vergelijkingen die jullie vast wel kunnen oplossen.* (Ik laat in dit verhaaltje *voor welke x, y ,z …?* maar weg.)
I. $x^2 = 4$; $x^2 = 121$; $49x^2 = 625$; $x^2 = 7$; $x^2 = 0$; $x^2 = -16$
Ik spoor de leerlingen aan te schrijven: 'Voor welke reële x : $x^2 = -16$? heeft als oplossingsverzameling *de lege verzameling*' of: 'voor geen enkel reëel getal x'.
II. $(y - 5)^2 = 4$; $(y - 5)^2 = 121$; $49(y - 5)^2 = 625$; $(y - 5)^2 = 7$; $(y - 5)^2 = 0$; $(y - 5)^2 = -16$
III. $2(z + 7)^2 = 8$; $2(z + 7)^2 = 242$; $49(2z + 7)^2 = 625$; $5(2z + 7)^2 = 0$; $(2z + 7)^2 = -16$

Merk nu op dat je [Voor welke reële y : $(y-5)^2 = 7$?] hebt kunnen oplossen, namelijk:
$(y-5)^2 = 7 \Leftrightarrow y - 5 = \sqrt{7}$ of $y - 5 = -\sqrt{7} \Leftrightarrow y = 5 + \sqrt{7}$ of $y = 5 - \sqrt{7}$
Maar $(y-5)^2 = 7 \Leftrightarrow y^2 - 10y + 25 = 7 \Leftrightarrow y^2 - 10y + 18 = 0$.
Je kunt dus oplossen : [Voor welke reële y : $y^2 - 10y + 18 = 0$?] !
Laten we nu eens kijken naar de vergelijking: [Voor welke reële x : $x^2 + 4x + 1 = 0$?]
Wat vind je van:
$x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 3 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 3 \Leftrightarrow x + 2 = \sqrt{3}$ of $x + 2 = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -2 + \sqrt{3}$ of $x = -2 - \sqrt{3}$
De truc is dus om op te merken: [Voor elk reëel getal x : $x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 - 3$].

Telkens (na een paar van zulke voorbeelden) riep wel een van de leerlingen zoiets als: *je moet gewoon de weg terug bewandelen*. Daarmee was de methode *kwadraatafsplitsing* (her) ontdekt. Die methode werd geoefend en culmineerde in de *opgave*:
a, b, c zijn reële getallen en $a \neq 0$: [Voor welke reële x : $ax^2 + bx + c = 0$?]
en in de formulering van de *conclusie*:
De oplossingsverzameling is leeg als $b^2 - 4ac < 0$.
Die verzameling bevat één element als $b^2 - 4ac = 0$, te weten: $-\frac{b}{2a}$.
Die verzameling bevat twee elementen als $b^2 - 4ac > 0$, te weten: $-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
Omdat:
$$x^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
Die equivalentie kun je voor al zulke reële getallen a, b en c bewijzen.

'Trouwe vriend'

Achteraf gezien. Wat zou ik gelukkig geweest zijn als ooit een van mijn leerlingen zoiets zou hebben gezegd:
Ik zie heel gemakkelijk en direct dat $x^2 + 8x + 15$ *altijd gelijk is aan* $(x+3)(x+5)$*; dat is bijna net zo gemakkelijk als zien dat* $(x+3)(x+5) = 0$ *gelijk is aan* $x^2 + 8x = 15$*; maar dat* $2x^2 + 9x + 10$ *gelijk is aan* $(2x+5)(x+2)$*, vind ik veel moeilijker!*
Ik hoop van harte dat ik zo gereageerd zou hebben:
Dat heb je wel heel scherp opgemerkt; vrijwel iedereen is het vast met jou eens. Denk even aan de vuistregel: maak uit de drieterm $ax^2 + bx + c$ door splitsing van de term bx een vierterm $ax^2 + ux + vx + c$ waarbij niet alleen $u + v = b$ maar ook $uv = ac$.
Je trouwe vriend WISKUNDE zal je niet beschamen. Die vierterm zal blijken het product van twee tweetermen te zijn! Kijk maar…
Die vierterm is dan: $ax^2 + ux + vx + \frac{uv}{a}$. Je kunt dan twee dingen doen.
Óf a buiten haakjes halen:
$$a \cdot (x^2 + \frac{u}{a}x + \frac{v}{a}x + \frac{u}{a} \cdot \frac{v}{a}) = a \cdot (x + \frac{u}{a})(x + \frac{v}{a})$$
óf $\frac{1}{a}$ buiten haakjes halen:
$$\frac{1}{a} \cdot [(ax)^2 + u(ax) + v(ax) + uv] = \frac{1}{a} \cdot (ax+u)(ax+v)$$
Beide zijn bijna even duidelijk als jouw $x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5)$.

abc-formule?

Hoe een en ander in de erop volgende jaren werd gepraktiseerd, moge blijken uit de volgende anekdote. In die jaren werd het HBS-eindexamen nagekeken door de leraar-examinator. Het werd toegestuurd naar de benoemde 'deskundige' en op de eerste dag van het mondeling examen werd in hun onderling overleg het cijfer voor het schriftelijk examen wiskunde vastgesteld. De kandidaten met een cijfer 7 of hoger hoefden geen mondeling examen te doen.
In een van die jaren begon de deskundige ons overleg met op te merken: *Ik heb de indruk dat uw leerlingen de abc-formule niet kennen*. Op mijn woorden: *Daarover hoeft U zich geen zorgen te maken, denk ik*, antwoordde hij: *U vindt het natuurlijk goed dat ik dat zal onderzoeken.* Aan de eerste kandidaat: *Schrijf eens op:* $px^2 + qx + r = 0$*. Wil je die vergelijking voor mij oplossen?*
De kandidaat wierp mij een verbaasde blik toe. Ik: *Doe maar wat je gevraagd wordt.*
De kandidaat: *Ik neem maar aan dat p niet 0 is, dan kan ik er door delen.* Hij schreef:
$$x^2 + \frac{q}{p}x + \ldots = \ldots - \frac{r}{p}$$
Links vulde hij in $(\frac{q}{2p})^2$ en rechts $\frac{q^2}{4p^2}$. Vervolgens: $(x + \frac{q}{p})^2 = \frac{q^2}{4p^2} - \frac{r}{p}$.

Als dit – hij omcirkelde het rechterlid – *negatief is, is er geen oplossing, als het* 0 *is, is er één oplossing, als het positief is …*
En opnieuw keek hij mij met opgetrokken wenkbrauwen aan; hij had niet meer hoeven doen dan een ontelbare reeks van zulke handelingen met één te verlengen.
Kende deze kandidaat de *abc*-formule of kende hij die niet? Mij zou niet verbaasd hebben als hij op de vraag '*hoe luidt de abc-formule?*' geantwoord zou hebben '*geen idee*'. Maar dat zou niet meer betekend hebben dan dat hij de *naam* van een heel bepaald algoritmisch recept niet kende. Hij heeft laten zien dat hij zich er terdege van bewust is dat hij alle vierkantsvergelijkingen (binnen **R**) kan oplossen. Zijn kennis lijkt te berusten op een inzicht dat hem – kennelijk – in staat stelde de methode van kwadraatafsplitsing te generaliseren: hij bleek in staat het *abc*-formule-recept zelf te fabriceren. Zou het niet pure kwaaddenkendheid zijn om zijn gedrag te kwalificeren als *ingestudeerde imitatie*?
Hoe dan ook, deskundige en examinator hebben in de dagen die volgden, het uitstekend met elkaar kunnen vinden. Aan de *abc*-formule hebben zij geen woord meer besteed.

Inzicht?

In het deel van *Moderne Wiskunde* voor havo en vwo waarin vierkantsvergelijkingen worden behandeld (en dat gebruikt werd in de klas waarin een van mijn bijlesleerlingen zat), heb ik geen andere vergelijkingen aangetroffen die door ontbinding kunnen worden opgelost, dan vergelijkingen met $a = 1$. Alle andere moeten de leerlingen oplossen met de hun meegedeelde *abc*-formule. En een bewijs daarvan heb ik in dat deel niet kunnen vinden!
In mijn geheugen ligt de uitspraak van professor A. van Rooij: 'De grootste fout die je als wiskundestudent kunt maken, is je leermeester op zijn woord geloven'.
Mogen auteurs van een schoolboek die wijsheid zo flagrant negeren en er (misschien wel) op rekenen dat de leraar zulk verzuim zal opheffen?
De reclamekreten op het achterblad van het bedoelde nummer van *Euclides* waren:

Leert u ze een trucje of leert u ze wiskunde?
Moderne Wiskunde geeft uw leerlingen écht inzicht!

Ook in de hierboven vermelde editie? Ik heb echt zeer mijn best gedaan er een bewijs van die algoritmische receptuur in te vinden. Tevergeefs!

Noot

[1] Wim Laaper (2010): *AlgebraKIT ontwikkeld door Martijn Slob*. In: *Euclides* 86(3); pp. 126-127.

Over de auteur

Overzicht van werkzaamheden van A.J.Th. Maassen:
1945-1951: studie Wis- (en Natuur)kunde RU (dr. Bockwinkel, prof.dr. Popken, prof.dr. Freudenthal);
1947-1975: leraar wis- (en natuur)kunde KGL, Arnhem;
1964-1987: wetenschappelijk hoofd-ambtenaar KUN en twee docentschappen: Klassieke Meetkunde en Didactiek van de Wiskunde;
1963-1969: secretaris Wimecos resp. NVvW.
In de zestiger jaren:
- coauteur (met dr. C. van Oosten) van *Planimetrie 1,2,3 voor het VHMO* (Malmberg);
- lid Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde en, in opdracht van die commissie, coauteur (met M. Kindt en C. van Oosten) van *Moderne Algebracursus* (Malmberg).

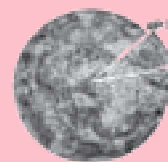
E-mailadres: *m.schrievers@home.nl*

Oproep / Deelname Onderbouw-wiskundedag

Het Freudenthal Instituut onderzoekt de mogelijkheid om in navolging van de Alympiade en de Wiskunde B-dag een wiskundewedstrijd voor teams van drie of vier leerlingen uit de onderbouw van havo/vwo te organiseren.
Een eerste pilot, bedoeld voor 3-havo en 3-vwo, wordt gehouden op **woensdag 8 februari 2012 van 9:00 tot 14:00 uur.**

Heeft u interesse om met een aantal teams aan deze pilot mee te doen, of wilt u eerst meer informatie, stuur dan een e-mailbericht naar Monica Wijers (*m.wijers@uu.nl*).

Differentialen en Diepvriespizza's



[Dorien Lugt]

[Red.] Heeft u enig idee van het wiskundestudentenleven van tegenwoordig? Is wiskunde studeren nog was het was? Dorien Lugt is sinds augustus 2009 wiskundestudent aan de TU Delft en schrijft voor *Euclides* over haar belevenissen en observaties vanuit collegezaal en studentenhuis.

Zomaar een verjaardag in Delft

Ogenschijnlijk een normale verjaardag, huisgenoten, jaarclubgenoten en de band van de jarige zijn aanwezig. Allemaal Delftse studenten, op zijn broer na dan. Links gezeur over het gebrekkige Engels van een prof, rechts vertelt iemand over de stage die hij misschien gaat doen, en ik zit ertussen, samen met de broer. Ik heb hem vorig jaar al gesproken, op dezelfde verjaardag; dat was een leuk gesprek. Fiscale economie studeert hij, ik wist het nog. Nadat de herinneringen aan het gesprek van vorig jaar zijn opgehaald – 'Hoe was het afgelopen met die opdracht? Die ene over dat telefoonbedrijf? Oh, nou gelukkig maar.' – valt het even stil.

'Waar kijk je naar?', vraagt de broer. Ik wordt afgeleid door de belletjes op de binnenkant van mijn glas met cola. Snel achter elkaar komen de belletjes precies op dezelfde plek naar boven, ze wijken om de beurt naar links of naar rechts om plaats te maken voor de volgende en de buitenste twee spatten uiteen. De jongen die over zijn stage aan het praten was, vangt iets op en draait zich om.

'Koolzuur hecht zich toch aan vuil?'

'Nee,' begint een jongen aan de overkant, 'het ligt gewoon aan de stromingen in de cola.'

'Onzin, dat zou namelijk ook betekenen dat…'

Als niemand precies blijkt te weten hoe het zit, sta ik op om een biertje te pakken.

'Dorien, ik moest je nog iets vragen', hoor ik iemand anders achter me. Ik haal mijn hoofd weer uit de koelkast en draai me om. 'Wat is nou precies het verschil tussen een kringintegraal en een gewone integraal? En, waarom gebruiken ze in het ene geval een delta en in het andere geval een gewone d?' Er wordt pen en papier in mijn handen gedrukt. Niet veel later zitten er vijf mensen om ons heen. 'Wat doe je daar? Nee, dat klopt niet!' 'Ow, wacht het klopt wel! Maar ik zou het eerder zo schrijven, geef die pen eens.'

Er komen steeds meer zijsporen, maar iedereen heeft er iets over te zeggen.

'Je moet het fysisch bekijken, stel je hebt een magnetisch veld…'

De broer van de jarige zit er stilletjes bij, speelt een beetje met zijn telefoon. Hij loopt naar een andere groep, maar ik hoor dat daar het woord koolzuur opnieuw valt. Teleurgesteld komt hij weer naast me staan. 'Grappig hè, hoe gespreksonderwerpen zich verspreiden onder de verschillende groepen op een verjaardag.'

Hij glimlacht wat, maar kijkt gelijk geschrokken om zich heen. Kennelijk heeft hij eerder dan ik bedacht, dat ook daar wel eens flinke discussies over zouden kunnen ontstaan.



Thuisgekomen zie ik wat hij aan het doen was met zijn telefoon. Een berichtje op Facebook: 'Een verjaardag in Delft, wat is het gesprek van de avond? Nou…'. Op de Facebook-pagina staat ook een foto van ons kladblaadje.

Lesson study

DEEL 1

[Nellie Verhoef]

Nellie Verhoef schreef in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* al over de Lesson Study [1], een handreiking om denkactiviteiten te ontwerpen in een samenwerkingsverband. Het onderwerp is echter zo veelzijdig dat ze er in *Euclides* ook aandacht aan besteedt. We publiceren haar artikel in twee delen. Dit eerste deel geeft een overzicht van de methode en een voorbeeld van denkactiviteiten. Het tweede deel gaat concreet in op het samenwerkingsverband en de resultaten daarvan.

Lesson Study als stimulans om docenten het vak te leren of te leren verbeteren, is afkomstig uit Japan. Al meer dan honderd jaar is dit de manier om docenten te scholen (Fernandez, Yoshida; 2004). In de jaren zestig kwam er een herleving door het besluit van de regering om het salaris van onderwijsgevenden te laten stijgen, onder de voorwaarde dat de schooldag van onderwijsgevenden niet om drie uur maar om vijf uur zou eindigen (Nakatome; 1984). Als gevolg daarvan hebben docenten elke middag ruim de tijd om te overleggen en samen voor te bereiden. Dit was de randvoorwaarde voor het succes van de effecten van Lesson Study. Voor zijn dissertatie observeerde Yoshida in de periode oktober 1993 tot en met maart 1994 in de omgeving van Hiroshima 94 klokuren Lesson Study in het primair onderwijs waarvan 32 video-opnames en de rest voorzien van aantekeningen. Er waren 232 docenten als observant bij zijn onderzoek betrokken. Yoshida (1999) rapporteert hoe docenten leren van het observeren van lessen, en hoe zij vervolgens hun eigen lessen kunnen verbeteren met het oog op het leren van leerlingen (***zie foto 1a en foto 1b***).

De Japanse Lesson Study in de praktijk van het primair onderwijs

foto 1a



foto 1b



Kenmerkend voor de Lesson Study aanpak is dat deelnemende docenten intensief samenwerken, zich samen verantwoordelijk voelen voor de uitvoering. Deze aanpak kost tijd; de effecten zijn echter de moeite waard. Docenten zien wat leerlingen in werkelijkheid doen als ze in de klas zitten, daar is gewoonlijk geen tijd voor.

Wat is Lesson Study?

Bij Lesson Study formuleren docenten allereerst een algemeen gezamenlijk doel. Denk bijvoorbeeld aan motivatie, samenwerken, het nut van wiskunde, of zoals in dit geval het ontwerpen van denkactiviteiten. Het doel is dus niet 'de perfecte les'. Vervolgens gaan de docenten aan de slag en ontwerpen samen een les, de onderzoeksles, het doel in het oog houdend. Bij de uitvoering van de les, gaan de deelnemers fysiek bij elkaar observeren. Het idee is die van een soort 'open huis' – iedereen die geïnteresseerd is, kan de uitvoering van de les observeren. In Japan komt het voor dat er meer dan twintig observanten zijn. De observanten maken classroom notes gerelateerd aan de gezamenlijk geformuleerde lange termijn doelen. De observaties gaan niet over de rol van de docent of die van het lesmateriaal, wel over leerlingen – hoe ze leren. Na de les wordt de les geëvalueerd aan de hand van de classroom notes, reflectie leidt vervolgens tot bijstelling en herziening van de les. De les wordt daarna in een andere setting opnieuw uitgevoerd. Deze cyclus kan plaatsvinden binnen één school, of binnen een verband van scholen (Isoda; 2010). Meer dan honderd jaar ervaring heeft Japanse docenten de gelegenheid gegeven om zich bewust te worden van hun onderwijsidealen in de weerbarstige werkelijkheid van de lespraktijk. De docenten zijn tegen de (on)mogelijkheden om veranderingen te realiseren opgelopen. Ze hebben leren kijken door de bril van leerlingen en leren genieten van de samenwerking met collega's. Japanse docenten geven aan dat ze hierdoor in staat zijn objectief naar hun eigen onderwijs te kijken. De Lesson Study heeft in Japan allerlei neveneffecten. Curricula, lesboeken en andere lesmaterialen blijven voortdurend aan verandering onderhevig omdat de auteurs, de docenten, steeds nieuwe inzichten verwerven. Die inzichten zijn een direct gevolg van de observaties (Murata, Alston, Hart; 2010). De leerling-observaties leggen bloot waar de problemen zich voordoen, welke misconcepties er leven en waar blokkades optreden. Een ander neveneffect is dat de docent een sleutelrol gaat vervullen. De docent is non-stop op zoek naar opdrachten die elke leerling uitdagen om te zoeken naar eigen oplossingen en te leren van oplossingen van anderen, waardoor er verdieping ontstaat. Een digiboard in de les wordt bijvoorbeeld niet alleen gebruikt om wiskundige begrippen duidelijk te maken (demonstreren), maar om gedachten en ideeën van collega-leerlingen te verzamelen om die later te kunnen vergelijken en dwarsverbanden aan te kunnen brengen.

De situatie in de VS, Australië, Engeland en Nederland

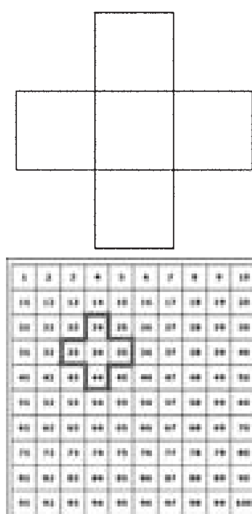
Langzamerhand wordt deze aanpak ook in westerse landen geïntroduceerd. Dat gaat niet vanzelf. Pijnlijk duidelijk wordt dat er grote cultuurverschillen zijn. In de VS zijn docenten geneigd om snel tot resultaat te komen. De nadruk ligt, ingegeven door de prestatiecultuur, op het verbeteren van het lesmateriaal in plaats van het optimaliseren van het leren van leerlingen. In Engeland en Australië wordt de implementatie van de Lesson Study bemoeilijkt door de strenge exameneisen. Docenten worden afgerekend op het resultaat van hun leerlingen bij het eindexamen. De exameneisen bepalen wat leerlingen moeten kennen en kunnen. Er is weinig ruimte voor experimenten. In de Nederlandse situatie werken vooral de boeken en de studiewijzers belemmerend. De boeken zijn geschreven voor zelfwerkzaamheid: de opgaven zijn gestapeld in a) t/m f) en er staat vooraf vast welke opgaven in welke les de revue passeren. In de les werken de leerlingen zoveel mogelijk zelfstandig, de docent helpt waar nodig. In de Japanse situatie is dat onmogelijk. Leerlingen worden geacht thuis hun huiswerk zelfstandig te maken, in de les zijn ze samen onder leiding van de docent aan het werk. Voorop staat het uitdagen van leerlingen om zelf na te denken! Voor hen is een zes geen voldoende, het kan altijd weer beter.

De kracht van samenwerkingsverbanden

In Nederland, met name in Twente, wordt mondjesmaat ervaring opgedaan met samenwerkingsverbanden tussen vo- en wo-docenten. Er zijn verschillende typen verbanden: Community of Leaners (CoL), Docent Ontwikkelteam (DOT) en Lesson Study Team (LST). In een CoL gaat het om professionele ontwikkeling van docenten door het lezen van literatuur, het bespreken daarvan met collega's van andere scholen en wetenschappelijk medewerkers van de universiteit, en de effecten van vernieuwingen in de lespraktijk. In een DOT staat het samen ontwikkelen en uitvoeren van nieuw lesmateriaal centraal, en in een LST wordt de Lesson Study aanpak beproefd en bestudeerd. Bij LST ligt de nadruk op het ontwerpen van opdrachten die leerlingen activeren en aan het denken zetten – denkactiviteiten dus.
De samenwerkingsverbanden hebben gemeenschappelijke kenmerken: het hervinden van de lol in je vak, de vreugde van het samen met collega's ontwerpen van uitdagende lesopdrachten, en de stimulans die uitgaat van de directe werkrelatie tussen voortgezet en wetenschappelijk onderwijs.

Vier voorbeelden van uitdagende Lesson Study opdrachten

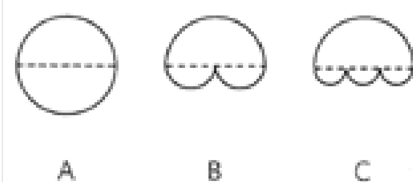
Opgave 1 – Leg willekeurig een kruis over vijf getallen in een honderdveld (***zie figuur 1a en figuur 1b***). Wat kun je zeggen over de vijf getallen?



figuur 1a Het kruis
figuur 1b Honderdveld

De opgave kan op allerlei manieren worden benaderd: je kunt alle vijf getallen bekijken, alleen de rij, alleen de kolom, alles behalve de middelste, onderlinge relaties etc.

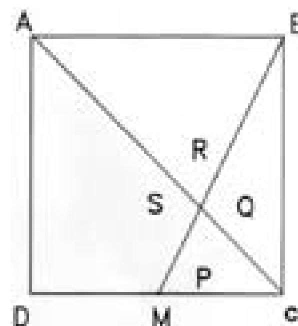
Opgave 2 – Welke omtrek is het langst, en waarom (***zie figuur 2***)?



figuur 2 Omtrek

Alle omtrekken zijn even lang, maar hoe komt dat? Zijn er nog meer vormen met dezelfde omtrek? Uiteindelijk zal het gaan over de evenredigheid tussen diameter en omtrek. Dit is bij uitstek een onderwerp voor een klassengesprek.

Opgave 3 – *ABCD* is een vierkant, *M* is het midden van *DC* (***zie figuur 3***). Hoe verhouden zich de oppervlakken van de vier delen *P*, *Q*, *R* en *S* van het vierkant *ABCD*?

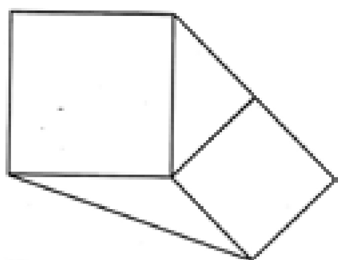


figuur 3 Vier delen van het vierkant *ABCD*

Tja, hoe pak je dat aan? Je kunt gaan knippen op Van Hiele's waarnemingsniveau, rekenen op Van Hiele's beschrijvende niveau, of je baseren op definities en

stellingen op Van Hiele's theoretische niveau (Van Hiele; 1986). Als je gaat knippen kom je wellicht op een vermoeden… Als je gaat rekenen, zou je kunnen beginnen met $MC = x$ te kiezen en dan oppervlaktes van delen uitdrukken in x. En heus, je komt eruit – duurt misschien wat lang, maar toch… Als je je baseert op definities en stellingen: $Q = 2P$, $(Q + P)$ is een vierde deel, dus P is een twaalfde deel. Driehoek ACD is de helft, dus R is en zesde deel en S is analoog vijftwaalfde deel. Leuk toch?

Opgave 4 – Of deze: Wat kun je zeggen over oppervlakte van beide driehoeken, uitgaande van twee vierkanten (***zie figuur 4***)?



figuur 4 Vierkanten en driehoeken

Ook bij deze opgave kun je veel kanten op: knippen, rekenen of 'rijke cognitieve eenheden' aanspreken om maar iets ingewikkelds te noemen… Een cognitieve eenheid beschrijft een mentale structuur. Cognitieve eenheden worden *rijk* genoemd als er sterke interne verbanden tussen verschillende objecten of representaties van objecten zijn ontstaan door compressie, welke dan weer tot krachtige denkstappen kunnen leiden (Barnard, Tall; 2001).

De verleiding is nu eenmaal groot om aan de slag te gaan met allerlei oppervlakteformules die je je (misschien) nog herinnert – toch niet handig. Immers, de oppervlakte van de onderste driehoek is basis (zijde groot vierkant) maal halve hoogte en de oppervlakte van de bovenste driehoek is basis (zijde groot vierkant) maal halve hoogte. Nu een schets en wat blijkt? De hoogtes zijn gelijk op grond van congruentie.

Dit zijn een aantal denkactiviteiten die geschikt zouden kunnen zijn om op verschillende manieren aan te pakken, en wel zo dat er uiteindelijk sprake is van niveauverhoging in de zin van Van Hiele. Dat betekent dat leerlingen op basis van de eigenschappen van objecten gaan redeneren, steeds theoretischer – minder afhankelijk van representaties.

Het nut van denkactiviteiten

De voorbeelden zijn te typeren als denkactiviteiten. De eronder liggende wiskunde is zinvol (meetkundig inzicht, combinatie van meten en rekenen), aantrekkelijk (motiverend, nodigt uit tot samenwerking) en leerlingen worden uitgedaagd om zelf te proberen. De diverse oplossingen zijn een aanzet tot niveauverhoging in de zin van Van Hiele: er is sprake van groeiende abstractie.
Natuurlijk kan niet elke les op zo'n manier worden uitgevoerd – maar als rode draad, in een vaste regelmaat, zou er gestreefd kunnen worden naar een groeiend wiskundig besef.

Met dank aan Harrie Broekman voor de meetkundeopgaven uit de oude doos.

Noot

[1] N. Verhoef (2011): *De kunst van het lesgeven*. In: *Nieuw Archief voor Wiskunde*, vijfde serie, deel 12, nummer 3 (september 2011); pp. 206-209.

Literatuur

- T. Barnard, D.O. Tall (2001): *A comparative study of cognitive units in mathematical thinking*. In: *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*; pp. 89-96.
- C. Fernandez, M. Yoshida (2004): *Lesson study / A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah (NJ, USA): Erlbaum.
- P.M. van Hiele (1986): *Structure and insight / A theory of Mathematics Education*. London: Academic Press Inc.
- M. Isoda (2010): *Lesson Study / Problem solving approaches in mathematics education as a Japanese Experience*. In: *Procedia Social and Behavioral Sciences*, vol. 8; pp. 17-27.
- A. Murata, A.S. Alston, L.C. Hart (2011): *Lesson Study, research and practice in Mathematics education*. New York: Springer.
- T. Nakatome (1984): *Konaikenshu o tsukuru: Nihon no koanikenshu keiei sogoteki kenkyu* [Developing konaikenshu: A comprehensive study of the management of Japanese konaikenshu]. Tokyo: Tooyookan Shuppansha.
- M. Yoshida (1999): *Lesson study / A case of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development*. Unpublished doctoral dissertation. Chicago (IL, USA): The University of Chicago.

Over de auteur

Nellie Verhoef is onderzoeker en vakdidacticus wiskunde aan de Universiteit Twente.
E-mailadres: *n.c.verhoef@utwente.nl*

Vanuit de oude doos

A$^{\underline{o}}$ 1928

[Ton Lecluse]

**In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die de vorige eeuw tot in de tweede wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt.
Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden, wellicht met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Mogelijk geeft een van de opgaven u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!**

Deze keer alleen een pittige trigonometrische opgave uit 1928.

Wellicht vindt u het leuk om de opgave eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgave wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening.
Na de opgave staat mijn uitwerking.

Opgave (1928)

In driehoek *ABC* is *AD* middellijn van de omgeschreven cirkel; *AE* en *BF* zijn hoogtelijnen. Indien de stralen van de omgeschreven cirkels van driehoek *EFC* en driehoek *ABC* zich verhouden als 1 : 4, en opp(*ABC*) = 2 opp(*ABD*) vraagt men de hoeken van driehoek *ABC* te berekenen.

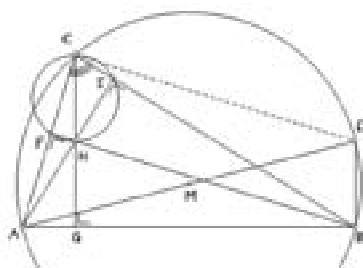
Opmerking – Mijn oplossing bevat een aantal leuke stukjes uit de bewijsmeetkunde naast een stuk (tri)goniometrie!
Met als uitdaging erachteraan, iets dat Geocadabra ontdekte: bewijs dat *AC*, *GE* en *BD* door één punt gaan. Het bewijs daarvan mag u me toesturen!

Probeert u een en ander eerst even zelf?

....

Uitwerking

Eerst maar een tekening; ***zie figuur 1***.



figuur 1

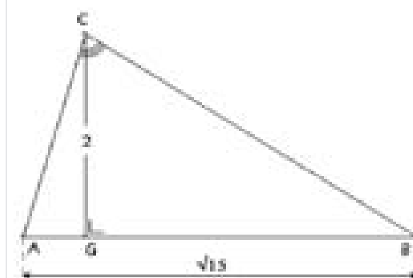
Een van de cirkels in de opgave is de omgeschreven cirkel van koordenvierhoek *CEHF*. Uit de gegeven cirkelafmetingen volgt dan dat *CH* = ¼*AD* (*CH* is middellijn van die omgeschreven cirkel). Uit de gegeven oppervlakteverhouding volgt dat *BD* = ½*CG*.
De omgekeerde stelling van Thales zegt dat ∠*ACD* = 90°, dus staat *CD* loodrecht op *AC*. Ook staat de hoogtelijn *BF* loodrecht op *AC*, zodat *CD* evenwijdig is met *BF*.
De omgekeerde stelling van Thales zegt dat ook ∠*ABD* = 90°, dus staat *BD* loodrecht op *AB*. En de hoogtelijn *CG* staat loodrecht op *AB*, dus *CG* is evenwijdig met *BD*.
Uit beide evenwijdigheden volgt dat *BHCD* een parallellogram is. Dus, *BD* = *CH* (= ¼*AD*).
Stellen we voor het gemak de straal van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* gelijk aan 2, dan weten we:
AD = 4, *BD* = *CH* = *HG* = 1
∠*C* = ∠*ADB* (omtrekshoeken op boog *AB*)
en in driehoek *ABD* geldt:

$$\cos(ADB) = \frac{BD}{AD} = ¼$$

Dus: ∠*C* = 75,52248781° = 75°31'21".
Uit de stelling van Pythagoras in driehoek *ABD* volgt: *AB* = √15.
Maar hiermee zijn we er nog lang niet! Hoe nu in driehoek *ABC* de hoek bij *A* of bij *B* te bepalen?
Probeert u het weer even zelf?

....

Twee mogelijke oplossingen. We maken een nieuwe tekening, waarin cos(*C*) = ¼; en dus sin(*C*) = ¼√15.



figuur 2

We weten dus de (sinus en cosinus van de) tophoek, de basis en de hoogte van deze driehoek. *Gevraagd*: de twee ontbrekende hoeken van de driehoek.
Eerst een (wellicht wat) minder fraaie oplossing.
Substitutie van *AG* = 2tan(90° – *A*) en *BG* = 2tan(90° – *B*) in *AG* + *BG* = √15 levert, met ∠*B* = 180°– ∠*A* – 75,52...°:

2tan(90° – *A*) + 2tan(*A* + 75,52...° – 90°) = √15

Deze vergelijking kan bijvoorbeeld worden opgelost met de grafische rekenmachine. Oplossingen: 72,943567° = 72°56'37" en 31,533945° = 31°32'2"; dit zijn waardes voor hoek *A* of voor hoek *B*.

Hoe zou deze vraag destijds (dus in 1928) opgelost zijn?
Het kan heel elegant met de cosinus- en sinusregel! En wel als volgt, met $AC = b$ en $BC = a$.
Cosinusregel in driehoek ABC:
$15 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(C)$
Dus:
(1)… $a^2 + b^2 - ½ab = 15$
Sinusregel in driehoek ABC:

$$\frac{c}{\sin(C)} = \frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)}$$

Dus: $\frac{\sqrt{15}}{¼\sqrt{15}} = \frac{a}{\frac{2}{b}} = \frac{b}{\frac{2}{a}}$, zodat: $4 = ½ab$. Of:
(2)… $ab = 8$
Uit (1) en (2) volgt dan: $a = \sqrt{\frac{19 \pm \sqrt{105}}{2}}$, waarmee:
(3)… $\sin(B) = \frac{2}{a} = \frac{4}{\sqrt{38 \pm 2\sqrt{105}}}$

(»)[1] In 1928 loste men een vergelijking als (3), met B als onbekende, op met logaritmen. Men gebruikte daarbij een logaritmentafel (in plaats van een rekenmachine). Het ging, rekenend met het plusteken in de uitdrukking voor sin(B), zie (3), min of meer als volgt:
- log(sin(B)) =
  = log(4) – ½ log(38 + 2√105)

Vervolgens:
- log(2√105) = log(2) + ½ log(105) =
  = 0,30103 + ½ · 2,02119 = 1,311625

De waarde van 2√105 kan nu worden teruggezocht. Voor de mantisse 311625 (het decimale gedeelte van de logaritme) vinden we in de tabel:
- log(2,049) = 0,31154 en log(2,050) =
  = 0,31175

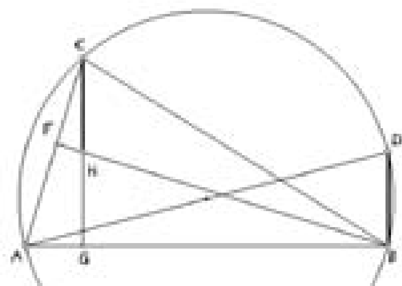
Lineaire interpolatie tussen die waardes geeft:
- N = 2,049 + 8,5/21 × 0,001= 2,0494
- log(2√105) = 10 × N = 20,494
- ½ log(38 + 20,494) = ½ log(58,494) =
  = ½ · 1,767112 = 0,883556
- log(sin(B)) = 0,60206 – 0,883556 =
  = -0,281496

En deze uitkomst kon worden teruggezocht in de in die tijd gebruikte tafels, omdat daarin ook de waardes van log(sin(x)) met x in graden, en oplopend in minuten, zijn opgenomen. We herschrijven de op te zoeken waarde in de gebruikelijke notatie:
- log(sin(B)) = -0,281496 =
  = 9,718504 – 10

Met lineaire interpolatie tussen de waardes 9,71850 (31°32') en 9,71870 (31°33') blijkt:
- $\angle B$ = 31°32' + 0,4/20 × 60" =
  31°32'1,2"≈ 31°32'1"

Rekenend met het minteken in uitdrukking (3) vinden we op dezelfde manier:
- $\angle B$ ≈ 72°56'38" **(«)**

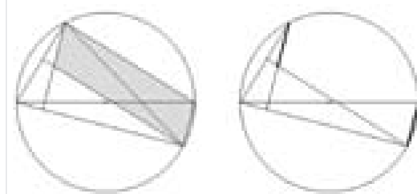
De sinus- en cosinusregel zijn eindtermen op het vwo; dus kan de opgave mooi als lesmateriaal worden gebruikt!
In klas 5/6-vwo, wiskunde B, is het ook aardig te laten aantonen dat BD en CH dezelfde lengte hebben.



figuur 3

Gegeven: Driehoek ABC met hoogtelijnen BF en CG en hoogtepunt H. AD is middellijn van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC. ***Zie figuur 3***.
Te bewijzen: $BD = CH$.

Dat kan ook in de vorm van een *sangaku*; in twee varianten, ***zie figuur 4***.


figuur 4

Noten
[1] Het gedeelte van de tekst tussen (») en («) is geschreven door Dick Klingens (waarvoor dank). Hij gebruikte daarbij de logaritmentafel die onder [2] vermeld is. Dit is een tafel waarvan de waardes zijn berekend in 5 decimalen.
[2] R.D. Carmichael, E.R. Smith (1932): *Mathematics Tables and Formulas*. New York: Dover Publications, Inc. (reprint, 1962).

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgeversmaatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*



TI-nspire CX

Wachten duurt langer dan je denkt

[Tanja Van Hecke]

Wiskundigen kijken door een eigen bril naar onze leefwereld. Ze stellen zich vragen bij de mogelijkheid om alledaagse dingen te modelleren en te optimaliseren. Zo overkwam het mij ook tijdens het wachten op een bus – normaal gezien een verloren moment van de dag. Een muzikant zou misschien met een liedje bezig zijn in zijn hoofd, terwijl een wiskundige zich afvraagt wat we kunnen leren uit het modelleren van de wachttijd aan de bushalte.

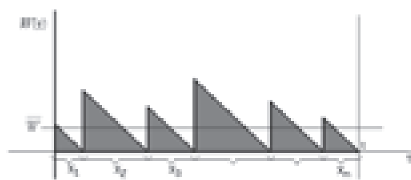
Introductie

Als we een bus willen nemen die gemiddeld om de 6 minuten komt en we op een willekeurig tijdstip aankomen bij de bushalte, verwachten we dat we gemiddeld 3 minuten zullen moeten wachten op de bus. Niets blijkt minder waar: wanneer er variatie aanwezig is in de aankomsttijden tussen twee opeenvolgende bussen, blijkt onze wachttijd hierdoor aanmerkelijk toe te nemen. In de volgende wiskundige modellering berekenen we de gemiddelde wachttijd op de bus bij een willekeurig aankomstmoment bij de bushalte en zien we dat dit behoorlijk kan tegenvallen.

Modellering

Om aan de hand van kansfuncties en verdelingen de gemiddelde wachttijd op de bus te berekenen voeren we eerst notaties in. Zij $W(\tau)$ de wachttijd bij aankomstmoment τ, T_i het tijdstip waarop de i-de bus langskomt en X_i de tijd tussen de $(i-1)$-de en de i-de bus (***zie figuur 1***). Dus:

$X_i = T_i - T_{i-1}$ met $1 \leq i \leq n$



figuur 1 De wachttijd W als functie van de aankomsttijd τ van de passagier

Wegens de willekeurigheid van het aankomstmoment van de passagier bij de bushalte is de verdelingsfunctie van τ constant, namelijk $\frac{1}{t}$ (want we komen aan op een willekeurig tijdstip tussen 0 en t). Dan is de gemiddelde wachttijd op een bus als functie van het aankomstmoment τ gelijk aan:

(1)… $\overline{W} = \frac{1}{t}\int_0^t W(\tau)\,d\tau = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}X_i^2\right)$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van de uniforme verdeling van het aankomstmoment τ, van de oppervlakteberekening van driehoeken en hebben we verondersteld dat t overeenstemt met een geheel aantal driehoeken.

Aangezien t de lengte voorstelt van de periode waarin bussen rijden, is de gemiddelde aankomsttijd tussen twee opeenvolgende bussen:

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{t}{n}$

Wanneer $t = \sum_{i=1}^{n} X_i$ wordt gesubstitueerd in (1), verkrijgen we als de gemiddelde wachttijd:

(2)… $\overline{W} = \frac{1}{2}\frac{\overline{X^2}}{\overline{X}}$

Aangezien voor de variantie van de tijden tussen twee opeenvolgende bussen geldt:

$\sigma_X^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2$

kan de gemiddelde wachttijd ook herleid worden tot:

$\overline{W} = \frac{\overline{X}}{2} + \frac{\sigma_X^2}{2\overline{X}}$

De exponentiële verdeling wordt vaak gebruikt voor het modelleren van de tijd tussen twee gebeurtenissen die met een constante gemiddelde snelheid voorkomen. Voor positieve X-waarden wordt deze kansfunctie gegeven door:

$f(X) = \lambda e^{-\lambda X}$

Als we dus veronderstellen dat we binnen deze modellering kunnen uitgaan van het bijzondere geval dat X exponentieel verdeeld is met gemiddelde λ, dan zal gelden:

$\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \overline{X}^2$

Hierdoor vereenvoudigt de uitdrukking (2) voor de gemiddelde wachttijd tot $\overline{X}$, wat inhoudt dat we gemiddeld 6 minuten zullen moeten wachten op een bus indien de aankomsttijd van die bus exponentieel verdeeld is met gemiddeld 6 minuten.

Dit valt tegen, want intuïtief hadden we op een halvering van deze tijd gerekend.

Besluit

Het intuïtieve idee dat we slechts de helft van de gemiddelde tussentijd voor de aankomsten van de bussen moeten wachten, blijkt slechts waar te zijn in het geval van een constante tussentijd, dus *zonder* variantie. De praktijk is anders, waardoor onze wachttijd blijkt aan te groeien. De reden hiervoor is het arbitrair aankomstmoment van de passagier. Hierdoor heeft hij meer kans om in een interval terecht te komen waarbij de tijd tussen de aankomsten van twee opeenvolgende bussen groot is.

Over de auteur
Tanja Van Hecke (1973) behaalde een master in toegepaste wiskunde 1995 aan de Universiteit Gent. In 1998 verdedigde ze haar doctoraatsproefschrift in de numerieke analyse. Sinds 2000 werkt ze aan het departement Toegepaste Ingenieurswetenschappen van Hogeschool Gent binnen de vakgroep Wiskunde.
E-mailadres: *Tanja.VanHecke@hogent.be*

Over de drempels van de lerarenopleidingen

DOORGAANDE LEERLIJNEN TUSSEN KENNISBASES PO EN VO

[Caroliene van Waveren Hogervorst, Nathalie de Weerd]

Inleiding
Sinds de discussie over doorgaande lijnen en het wettelijk vaststellen van de referentieniveaus zijn we ons steeds bewuster van het belang van aansluiting tussen diverse schooltypen. Een leerling die net van de basisschool afkomt, bijvoorbeeld, heeft les gekregen volgens bepaalde didactische principes en is daarbij op een zeker niveau gekomen. Het is dan van belang dat deze leerling ervaart dat de leraar wiskunde in het vo hier op aansluit. Gravemeijer e.a. (2009) laten zien dat die aansluiting voor wat betreft vermenigvuldigen van breuken hiaten vertoont waar leraren, methodeschrijvers en opleiders voor het basisonderwijs en het voortgezet onderwijs zich nog niet genoeg van bewust zijn.
Hoe kan dit didactisch hiaat en de ongetwijfeld vele andere verklein worden, om te beginnen in de lerarenopleiding? Wij denken dat de kennisbasis pabo hier een rol in kan spelen. In dit artikel willen we laten zien hoe deze kennisbasis pabo een concrete invulling kan bieden voor bepaalde algemeen beschreven kennis in de kennisbases vo. We pretenderen hierbij niet volledig te zijn.
Dit artikel is een deelopbrengst van het onderzoek dat momenteel plaatsvindt binnen ELWIeR II (ELWIeR staat voor Expertisecentrum Lerarenopleiding Wiskunde en Rekenonderwijs [1]).
De opbouw van het artikel is als volgt. We zetten eerst op een rij welke documenten de kennisbases voor de lerarenopleidingen vormen. Aansluitend bij citaten uit de drie kennisbases voor het vo laten we zien wat de kennisbasis voor de pabo hierbij aan aanvullende kennis biedt. We sluiten af met een conclusie.



Kennisbases
Er zijn verschillende documenten die dienen als kennisbasis voor de opleidingen. Voor de pabo is geschreven:
- *Kennisbasis rekenen-wiskunde lerarenopleiding basisonderwijs* (Van Zanten e.a.; 2009). Dit document is een samenvatting van een uitgebreider document, geschreven door de projectgroep Voetstuk van de Pabo, met als titel Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo. We citeren in dit artikel uit deze uitgebreide versie en noemen die versie vanaf nu kortweg de *Kennisbasis PABO*.

Voor de opleidingen voor het vo zijn drie kennisbases ontwikkeld. Het gaat om de volgende documenten, die weliswaar niet allemaal het woord ‘kennisbasis’ in hun titel hebben, maar wel die rol (kunnen) vervullen:
- *Kennisbasis Wiskunde voor de tweedegraads lerarenopleiding* (Van Ast e.a; 2010), kortweg de *Kennisbasis Wiskunde*. In deze publicatie staat welke wiskundige bagage tweedegraads leraren moeten hebben.
- *Wiskundeleraar Vakbekwaam* (Jonker e.a; 2008), kortweg het *WiVa-document*. Hierin staat aan welke standaarden een tweedegraads leraar moet voldoen.
- *Handboek vakdidactiek wiskunde* (Van Streun, Zwaneveld, Drijvers; 2009), kortweg het *Handboek*. Dit handboek bevat de theoretische kennis die eerstegraads docenten nodig hebben bij het ontwerpen en uitvoeren van wiskundeonderwijs.

Wat de Kennisbasis PABO de kennisbases vo biedt
Hieronder bespreken we bij een citaat uit elk van de drie bovengenoemde kennisbases voor het vo welke concrete invulling de Kennisbasis PABO biedt.

Citaat 1 – WiVa-document
Een van de standaarden die in het WiVa-document genoemd worden, is:

> Een docent wiskunde:
> - heeft kennis van de achtergronden, inhoud en didactiek van het reken- en wiskundeonderwijs op de basisschool
> - …
>
> (Jonker e.a.; 2008, p. 12)

Er wordt niet nader toegelicht of uitgewerkt wat deze kennis inhoudt. De Kennisbasis PABO doet dat wel: zij schetst zowel de inhoud van het rekenonderwijs als de didactiek van het reken- en wiskundeonderwijs op de basisschool.
Deel I van de Kennisbasis PABO gaat over de globale theorie; achtereenvolgens komen de doelen van het vakgebied reken- en wiskunde op de basisschool, leerprocessen en vakdidactiek aan bod. In de paragraaf Vakdidactiek wordt de didactiek van realistisch rekenen gekenschetst door vijf principes te noemen:
1. Mathematiseren vanuit betekenisvolle realiteit: om te zorgen dat kinderen zich kunnen realiseren waar het rekenen over gaat, worden betekenisvolle problemen uit hun leefwereld of de hun bekende getallenwereld gekozen. Zodoende wordt de werkelijkheid beter begrepen doordat wiskundige middelen ingezet worden en wordt de wiskunde beter begrepen omdat zij afgeleid is uit de werkelijkheid.

2. Modelleren en formaliseren: om te komen tot formeel handelen worden modellen, schema's, betekenisvolle contexten en materialen aangeboden. Ook worden de kinderen uitgedaagd hulpnotaties te gebruiken.
3. Ruimte voor eigen inbreng van leerlingen: de leerlingen worden uitgedaagd zelf de wiskunde te herstructureren via geleid heruitvinden van wiskundige ontdekkingen. Ook hebben zij een actieve rol bij het produceren van opgaven en het vinden van creatieve oplossingen.
4. Interactie, reflectie en niveauverhoging: door middel van het verwoorden van oplossingen worden kinderen tot
5. reflectie op hun handelen en denken geprikkeld, met als doel een beter begrip en efficiëntere oplossingsprocedures.
6. Verstrengeling van leerlijnen: ten behoeve van een beter begrip en betere toepasbaarheid worden de verschillende leerlijnen waar mogelijk met elkaar en met de realiteit verbonden.

Deel II geeft domeinbeschrijvingen voor de volgende domeinen:
- Hele getallen;
- Verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen;
- Meten;
- Meetkunde;
- Verbanden.

Daarbij worden steeds besproken:
- Maatschappelijke relevantie;
- Kennis die pabo-studenten moeten hebben van dit domein;
- Kennis voor het onderwijzen van dit domein;
- Verstrengeling met andere domeinen en andere vak- en vormingsgebieden.

Met name het onderdeel 'Kennis voor het onderwijzen van dit domein', beschrijft de didactiek en concretiseert dus de geciteerde standaard in het WiVa-document.

Citaat 2 – Handboek vakdidactiek wiskunde, katern 0

Katern 0 van het Handboek (Van Streun; 2009) geeft een heuristiek voor het ontwerpen van kwalitatief goed wiskundeonderwijs.
Het begin van deze heuristiek luidt als volgt:

Beginsituatie
- Ken je leerlingen en je klas.
  Wat is de houding t.a.v. wiskunde?
  Wat waren de leerresultaten in het verleden?
  Welke werkvormen doen het in deze klas goed?
- Hoe zit het met de veronderstelde voorkennis?
  Welke voorkennis is nodig voor een goede start?
  Een begintoetsje laten maken?
  Wat doe je als de leerlingen de nodige begrippen en routines niet paraat hebben?
- …

(Van Streun; 2009, p. 66)

Om goed aan te sluiten bij de voorkennis van de leerlingen, is dus gedetailleerde kennis gewenst. Hoe kom je daar achter als leraar? Overdracht is daarbij belangrijk, maar een deel van de kennis is ook te halen uit documenten. De referentieniveaus (Meijerink e.a.; 2009) geven al een globaal antwoord op de vraag naar de voorkennis. De referentieniveaus zeggen echter niets over de in het basisonderwijs gebruikelijke didactiek. Daarvoor kan men te rade gaan bij de Kennisbasis PABO.
Zoals in het eerste voorbeeld al genoemd, worden in de Kennisbasis PABO per domein en soms per subdomein naast de maatschappelijke relevantie, de kennis die studenten zelf moeten hebben van dit domein en de verstrengeling met andere domeinen en andere vak- en vormingsgebieden, ook de kennis voor het onderwijzen van dit domein genoemd. Deze kennis is als volgt uitgesplitst bij ieder domein:
- Contexten en toepassingssituaties;
- Modellen en schema's;
- Oplossingsprocessen en niveauverhoging.

Ter illustratie hiervan citeren wij uit de paragraaf Modellen en schema's bij het subdomein breuken: 'Ondersteunende modellen en schema's bij breuken zijn met name: cirkel, rechthoek (plak), (dubbele) getallenlijn, strook en verhoudingstabel. De reikwijdte en bruikbaarheid van modellen verschilt en loopt uiteen van denkmodel tot rekenhulp (…). Zo kan de strook fungeren als denkmodel voor het onderverdelen in breuken en het verder onderverdelen in nog kleinere breuken. De verhoudingstabel kan fungeren als uitrekenhulp voor het bepalen van gelijkwaardige breuken' (Voetstuk van de Pabo; 2009, p. 80).
Voor wie nieuwsgierig wordt naar concrete voorbeelden hiervan, raden wij de site *www.fi.uu.nl/rekenlijn* aan. Hierop wordt duidelijk in beeld gebracht, aansluitend bij de referentieniveaus, hoe de leerlijnen van basisschool en onderbouw voortgezet onderwijs eruit zien. Er zijn voorbeelden van opgaven, leerlingenwerk en achtergrondinformatie.

Citaat 3 – Kennisbasis Wiskunde voor de tweedegraads lerarenopleiding

Op pagina 121 van de Kennisbasis Wiskunde (Van Ast e.a.; 2010) staat het volgende:

De startbekwame docent kan t.a.v. rekenen zonder rekenmachine:
- hoofdrekenen (tafels, kwadraten van de getallen 1 t/m 30, machten van 2 en 3 die kleiner zijn dan 1000);
- 'handig' rekenen, verschillende methoden*;
- schattend rekenen;
- cijferen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen) op papier;
- berekeningen uitvoeren met procenten, breuken en decimale schrijfwijzen;
- verhoudingstabellen gebruiken;
- het metriek stelsel toepassen;
- de volgorde van bewerkingen toelichten en uitvoeren.

De Kennisbasis PABO beschrijft elk van deze benoemde vaardigheden uitvoerig. Hieronder citeren we wat er geschreven wordt over schattend rekenen:

2.2.3B. Schattend rekenen

Schattend rekenen is het globaal bepalen van de uitkomst van een berekening met afgeronde getallen (Turkstra & Timmer, 1953; Sweers, 1996). Precies rekenen hoeft niet in elke situatie, soms is een globaal antwoord voldoende. Precies rekenen kan ook niet altijd, soms zijn de precieze gegevens niet of niet voldoende beschikbaar. Schattend rekenen is dus niet alleen het rekenen met afrondingen van precies gegeven getallen met de bedoeling een globaal antwoord te vinden, het moet ook gebruikt worden als de benodigde gegevens niet of niet volledig beschikbaar zijn (Gribling e.a., 1994). Afronden van getallen vormt de basis van

het schattend rekenen. Afronden van getallen vereist zicht op de grootte van getallen. Welk rond getal ligt er bij een getal in de buurt?
Niet elke afronding is in elke situatie even zinvol. Dat is afhankelijk van de grootte van de getallen en de mate van nauwkeurigheid die de situatie vereist. Bij een berekening met afgeronde getallen kan worden aangegeven in welke orde van grootte de uitkomst kan afwijken van de uitkomst van de precieze berekening. Door een precieze berekening in te klemmen tussen twee berekeningen met afgeronde getallen is een schatting van het mogelijke antwoord te geven.
De startbekwame leerkracht kan naar gelang situaties en opgaven een beredeneerde keuze maken tussen schattend rekenen en precies rekenen. Bij schattend rekenen kiest hij/zij voor passende afrondingen.
(Voetstuk van de Pabo; 2009, p. 53)

Conclusie

De Kennisbasis PABO kan delen uit de kennisbasis voor het vo concretiseren. Daarnaast zijn andere bronnen nuttig zoals de referentieniveaus, (zie: *www.fi.uu.nl/rekenlijn*) en de overdrachtsgegevens vanuit het basisonderwijs.
Om te zorgen dat leraren in opleiding en zittende wiskundedocenten uit deze bronnen kunnen putten, zal in veel gevallen scholing noodzakelijk zijn.

Noten

[1] ELWIeR biedt ondersteuning aan de lerarenopleidingen wiskunde en rekenen in Nederland. In de jaren 2007-2009 is een basis gelegd voor samenwerking tussen opleidingen pabo, tweedegraads en eerstegraads, in de projectperiode ELWIeR I. In de cursusjaren 2010-2011 en 2011-2012 staan implementatie-activiteiten op het gebied van de kennisbases voor de lerarenopleiding centraal. De kern van de samenwerking blijft dezelfde. Drie koepels spelen daarbij een belangrijke rol: Panama voor pabo, SLW voor tweedegraads lerarenopleiding [2] en Vadiwulo [3] voor de eerstegraads lerarenopleiding

[2] SLW = Samenwerkingsgroep Lerarenopleiding Wiskunde

[3] Vadiwulo = Vakdidactici Wiskunde Universitaire Lerarenopleidingen

Bronnen

- M. van Ast e.a. (2010): *Een beschrijving van de vakdidactische kennisbasis voor een startbekwame wiskundeleraar / Onderdeel van de kennisbasis wiskunde*. Arnhem: SLW/Hogeschool van Arnhem en Nijmegen.
- K.P.E. Gravemeijer e.a. (2009): *Aansluitingsproblemen tussen primair en voortgezet onderwijs - geen doorgaande lijn voor het vermenigvuldigen van breuken*. In: *Panama-Post. Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, nummer 28(4), pp. 14-19.
- V. Jonker e.a. (2008): *WiVa / Wiskundeleraar Vakbekwaam*. Utrecht: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren i.s.m. SBL en Freudenthal instituut, 29 (10 april 2008).
- M.P. Meijerink e.a. (2009): *Referentiekader taal en rekenen / De referentieniveaus.* Enschede: OCW/SLO.
- A. van Streun, B. Zwaneveld, P. Drijvers (red.) (2009): *Handboek vakdidactiek wiskunde*. Utrecht: ELWIeR/Freudenthal instituut.
- A. van Streun (2009): *Handboek Vakdidactiek Wiskunde, Katern 0 / Leren en onderwijzen van wiskunde*. Gevonden op: *www.fi.uu.nl/wiki/index.php/Handboek_Vakdidactiek_Wiskunde_(Algemeen)*
- Voetstuk van de pabo (2009): *Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo*. Eindversie, 3 juli 2009. Gevonden op: *www.kinderenlerenrekenen.nl/publicaties/98/*
- M. van Zanten e.a. (2009): *Kennisbasis rekenen-wiskunde lerarenopleiding basisonderwijs*. Den Haag/Utrecht: HBO-raad/ELWIeR/Panama.

Over de auteurs

Caroliene van Waveren Hogervorst (e-mailadres: *c.vanwaverenhogervorst@uu.nl*) was docent rekendidactiek bij de Marnix Academie in Utrecht. Sinds ruim twee jaar is zij lerarenopleider bij het Centrum voor Onderwijs en Leren van de Universiteit Utrecht.
Nathalie de Weerd (e-mailadres: *NTE.de.Weerd@windesheim.nl*) is docent rekenen/wiskunde aan de School of Education van Hogeschool Windesheim in Zwolle. Daarvoor was zij werkzaam als wiskundedocent in het vo.
Beide auteurs participeren in het werkpakket *Onderzoek* van ELWIeR II, het expertisecentrum lerarenopleiding wiskunde en rekenen.

Wereldwiskunde Fonds financiert twee projecten

ETHIOPIË EN MOZAMBIQUE

[Hans van de Lagemaat, Evert van de Vrie]

Ethiopië – Wiskundeboeken
Boek netjes en kleurig gekaft en schrift. Rekenmachine, passer en geodriehoek. Trots verschijnen bij de nieuwe brugklasleerlingen aan het begin van een nieuw jaar al deze ingrediënten bij wiskunde op tafel. Vol verwachting om uit de mond van de leraar te horen wat dit nieuwe vak hun allemaal voor moois gaat brengen. Voor iedere leraar heel herkenbaar. En heel gewoon. Althans, hier in Nederland.





Voor de leeftijdsgenootjes op een willekeurige school in Ethiopië ziet het begin van het jaar er wel iets anders uit. Zo ook op de Kesanet school in een van de wijken van Mekelle, de hoofdstad van de provincie Tigray.
Een boek? Zeker niet voor ieder een. Met een beetje geluk zo'n 10 jaar oud, en helemaal versleten. Soms gekaft in krantenpapier.
Een schrift en een pen? Alleen voor degenen die het zich kunnen veroorloven. Zorgvuldig wordt er met alle ruimte die de schriftjes bieden, omgegaan. U kunt zich een beetje voorstellen hoe dat eruit ziet. Passer, geodriehoek, rekenmachine: die zijn een zeldzaamheid.
De wil is er zeker. Ook bij het onderwijzend personeel. Met veel creativiteit worden veel onderwijsmiddelen zelf in elkaar geknutseld. Maar boeken blijven toch heel essentieel. En daarvoor ontbreken veelal de middelen.
Voor het vak wiskunde in grade 7 en 8 op de Kesanet school is dat verleden tijd. In september 2010 diende de school een aanvraag in voor boeken, die door het Wereldwiskunde Fonds (WwF) werd gehonoreerd. In de bibliotheek staan er nu zoveel wiskundeboeken, in het Engels en in de streektaal, dat bij de lessen iedere leerling over een boek kan beschikken. Ze gaan niet mee naar huis. Maar ook in hun vrije tijd kunnen de kinderen erover beschikken door in de bibliotheek te gaan studeren en hun huiswerk te maken.
Voor de docenten wiskunde zijn er wat boeken aangeschaft die hen kunnen helpen bij de didactiek en nascholing in de wiskunde.

Mozambique – Etnomathematica-boeken voor lerarenopleiding
Etnomathematica staat voor het onderzoek naar wiskundige aspecten in lokale culturen. In Mozambique blijkt er nogal wat wiskunde te ontdekken in de spellen die gespeeld worden, maar ook in patronen die voorkomen bij het vlechten van manden. Over deze aspecten zijn enkele boeken verschenen, en de lerarenopleiding van de Universidade Pedagogico in Nampula (Noord Mozambique) diende een verzoek in bij het WwF om die in te kunnen zetten bij het opleiden van nieuwe wiskundeleraren. Door aandacht te geven aan de relatie tussen de eigen lokale cultuur en wiskunde beoogt de lerarenopleiding een sterker zelfbewustzijn te ontwikkelen bij de toekomstige leraren, en de waardering te versterken voor de eigen historie en cultuur.



Het WwF heeft de aanvrage gehonoreerd, waarna twee keer 80 boeken zijn aangeschaft voor de bibliotheek van de Universidade Pedagogico. De boeken worden gebruikt in het derde en vierde studiejaar van de lerarenopleiding. De Universidade Pedagogico is de grootste universiteit van Mozambique, met 40.000 studenten in een aantal locaties verspreid over het hele land. De boeken die zijn aangeschaft zijn:
'Otthava: Fazer Cestos e Geometria na Cultura Makhuwa do Nordeste de Mocambique' (Otthava: manden vlechten en meetkunde bedrijven in de Makhuwa cultuur in het noordoosten van Mozambique) en *'Etnomatematica: Reflexoes sobre Matematica e Diversidade Cultural'* (Etnomatematica: bezinning op wiskunde en culturele diversiteit).
Het boek *Otthava* is het resultaat van dertig jaar onderzoek van de Makhuwa cultuur. Het bespreekt diverse contexten waarbij manden, hoeden, matten, trechters, schalen, valstrikken, muziekinstrumenten, etc. gevlochten worden en toont aan welke wiskundige, en dan met name meetkundige, ideeën de vlechters gebruiken. Er worden voorbeelden gegeven van wiskundige

activiteiten die voortbouwen op de ideeën van de handwerkers. Deze activiteiten kunnen door leraren worden ingebouwd en verder uitgewerkt in het middelbaar onderwijs en dienen als stimulans voor de toekomstige leraren om zelf onderzoek te doen in hun omgeving en hun lessen daarop aan te passen.
Het boek *Etnomatematica* is een inleiding met voorbeelden uit verschillende delen van de wereld. Het boek geeft ondermeer een overzicht van talsystemen in Afrika, van wiskundige ideeën in Zuidelijk Afrika, van meetkundige patronen in Kongo en Zuid Amerika en spelen uit Kameroen en Angola.

Over het WwF

Het WwF ondersteunt activiteiten in Derde Wereld Landen gericht op het wiskunde-onderwijs in middelbare scholen. Veelal betreft het de aanschaf van leermaterialen, of het ondersteunen van de professionalisering van leraren. Het Fonds krijgt zijn middelen door bijdragen van de leden van de NVvW, en door de verkoop van 'oude' wiskundeboeken.
Zie ook de website van het WwF (*www.nvvw.nl/page.php?id=1813*).

Over de auteurs

Hans van de Lagemaat is docent wiskunde aan het Driestar College en penningmeester van het WwF. Hij heeft van 2003 tot 2005 in Ethiopië gewerkt als docent wiskunde aan Mekelle Institute of Technology.
E-mailadres: *lag@driestarcollege.nl*
Evert van de Vrie is docent wiskunde aan de Open Universiteit en lid van de NVvW-werkgroep Wereldwiskunde Fonds.
In 1981 en 1982 heeft hij gewerkt in de eindexamenklassen van de Escola Secundaria Francisco Manyanga, Maputo, Mozambique. In 2003 heeft hij gedurende een sabbatical gewerkt aan toepassingen van ict in het onderwijs aan de Universidade Eduardo Mondlane, Maputo, Mozambique.
Zie verder ook zijn homepage, « *www.open.ou.nl/evv* ».
E-mailadres: *evert.vandevrie@ou.nl*



Mededeling / Vooraankondiging cTWO Wiskunde C conferentie

De vernieuwingscommissie cTWO organiseert op **woensdag 14 maart 2012** voor docenten in het voortgezet onderwijs en andere belangstellenden de *tweede* Wiskunde C-conferentie. Aanleiding van de conferentie is enerzijds het compleet vernieuwde examenprogramma voor het vak wiskunde C zoals dat volgens plan met ingang van 2015 landelijk zal worden ingevoerd en anderzijds de succesvolle eerste wiskunde C-conferentie die in het voorjaar van 2011 plaatsvond. Dit programma is volledig toegesneden op de belangstelling en mogelijkheden van de vwo-leerlingen in het profiel C&M.
De eerste ervaringen, zoals die de afgelopen cursusjaren zijn opgedaan bij leerlingen en docenten van de pilotscholen, zijn dusdanig veelbelovend dat cTWO dit onder de aandacht van alle vo-docenten wil brengen. Temeer omdat in het huidige 2007 programma 60 studielasturen beschikbaar zijn in de vorm van keuzeonderwerpen zodat hierbinnen onderdelen uit het vernieuwde programma goed inzetbaar zijn.

Programma

De globale opzet van de conferentie bestaat uit een plenaire lezing aan het begin en aan einde van de dag met daartussenin een aantal workshops met medewerking van o.a. pilotdocenten en wellicht hun leerlingen. Naast vakinhoud zal aandacht besteed worden aan allerlei praktische en organisatorische zaken rondom het vak wiskunde C.
Het precieze programma zal later op de website van cTWO (*www.ctwo.nl*) bekend worden gemaakt.

PWN: terugblik en plannen

platform wiskunde nederland

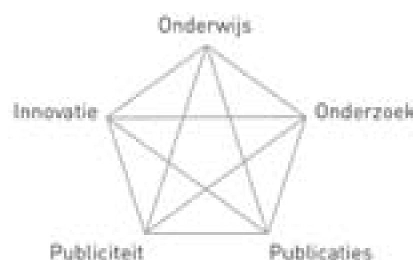
[Wil Schilders]

Dit artikel verschijnt ook in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* (december 2011). Het Platform Wiskunde Nederland is een gezamenlijk initiatief van het KWG en de NVvW, dus geven we in beide verenigingsbladen een overzicht van de stand van zaken.

In het najaar van 2010 werd het Platform Wiskunde Nederland (PWN) opgericht door het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW), ondersteund door de wiskunde-instituten van de Nederlandse universiteiten (inclusief Eurandom en het Freudenthal Instituut), de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO), het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI), en de stichtingen Thomas Stieltjes en Compositio. PWN is opgericht als centrale plaats binnen de Nederlandse wiskunde van waaruit alle zaken die voor de wiskunde van belang zijn, op efficiënte wijze behartigd kunnen worden. In het eerste jaar is PWN als landelijke organisatie neergezet, en zijn de commissies aan de slag gegaan. Hiermee is een solide basis gelegd voor het tweede jaar.
Na uitvoerige studies en diepgaande discussies, welke in de afgelopen jaren onder andere geresulteerd hebben in de rapporten 'Het Bureau Wiskunde', 'Blauwdruk PWN' en 'Masterplan Toekomst Wiskunde', heeft op 20 oktober 2010 de oprichting plaatsgevonden van het Platform Wiskunde Nederland. Hiermee heeft de wiskunde een orgaan gekregen dat vergelijkbaar is met het ICT-onderzoek Platform Nederland, het Nationaal Comité voor Astronomie, het Regieorgaan Chemie, het NIBI voor bio-science en andere soortgelijke platforms. In feite is PWN zelfs breder van opzet, het verenigt alle aspecten van de beoefening van het vak hetgeen wordt gereflecteerd in de vijf commissies: onderzoek, onderwijs, innovatie, publicaties en publiciteit. In deze zin is PWN een unieke disciplinegerichte organisatie. Deze integrale visie sprak ook reeds uit het Masterplan Toekomst Wiskunde.
PWN is opgericht als centrale plaats binnen de Nederlandse wiskunde van waaruit alle zaken die voor de wiskunde van belang zijn, op efficiënte wijze behartigd kunnen worden. Zodoende wordt de slagvaardigheid vergroot tot profijt van alle Nederlandse wiskundigen en is er een krachtige pleitbezorger voor de discipline wiskunde naar buiten toe. De algemene doelstelling van PWN is om te komen tot de versterking van de financiële, bestuurlijke, wetenschappelijke en publicitaire positie van het wiskundeonderzoek en wiskundeonderwijs in Nederland. Tevens streeft PWN naar coherentie en een effectieve inzet van middelen ten behoeve van het wiskundeonderzoek en wiskundeonderwijs, zowel in wetenschappelijk als in maatschappelijk opzicht. Vertaald naar de praktijk betekent dit dat PWN zich inzet:

- voor een realistische beeldvorming over wiskunde en wiskundigen;
- voor een stabiele infrastructuur van wetenschappelijk onderwijs en onderzoek;
- voor een betere positie van wiskunde in primair en voortgezet onderwijs;
- voor een betere aansluiting tussen voortgezet en hoger onderwijs;
- voor een betere verbinding tussen wetenschappelijke wiskunde en (innovatieve toepassingen in) het bedrijfsleven.

Kortom: PWN behartigt de belangen van en fungeert als spreekbuis voor de gehele Nederlandse wiskunde.
De organisatorische structuur gekozen voor het verwezenlijken van bovenstaande doelstellingen wordt gereflecteerd in de PWN-vijfhoek:



De genoemde commissies zijn de centrale actoren binnen PWN. Zij werken zowel initiërend als uitvoerend in hun domein, met eigen doelstellingen. Gezamenlijk werken zij aan dwarsverbanden tussen de verschillende commissies. Uitvoering van de door deze commissies en het bestuur uitgestippelde beleid geschiedt in nauwe samenwerking met het Bureau PWN.
Op deze wijze is een krachtige structuur ontstaan. De commissies zijn met grote zorg en breed samengesteld zodat 'de achterban' goed wordt gerepresenteerd. Op deze manier zijn mogelijkheden geschapen om op vele fronten tegelijk slagvaardig te werk te gaan. Het verenigen van al deze aspecten binnen één enkele organisatie is uniek, en schept additionele mogelijkheden om tevens aan de vele dwarsverbanden te werken.

PWN-commissies en dwarsverbanden

De commissies bouwen voort op een aantal belangrijke ontwikkelingen die we de afgelopen jaren hebben gezien. Zo is het 'Masterplan Toekomst Wiskunde' inmiddels wijdverbreid en ook bekend bij voor ons belangrijke organisaties (zoals OCW, ELI, NWO, KNAW en het rectorencollege), terwijl het KNAW-rapport 'Rekenonderwijs op de basisschool: analyse en sleutels tot verbetering' een hoog acceptatieniveau kent ondanks alle tegenstellingen die er de afgelopen jaren zijn geweest. Op Europees niveau is de afgelopen jaren veel bereikt op het uitermate belangrijke gebied 'wiskunde en industrie', waarbij het zogenoemde OECD-rapport [1] en het recente rapport van de ESF-EMS [2] op een zeer brede steun kunnen rekenen. Voor alle commissies geldt dan ook dat er reeds veel voorwerk heeft plaatsgevonden, en dit werk dient niet opnieuw te gebeuren. De commissievoorzitters, in nauwe samenwerking met bestuur en directeur, waken dan ook voor herhaling van zetten, en dragen zorg voor een implementatie van de bevindingen alsmede voor nieuwe ontwikkelingen. Gedetailleerde plannen van de commissies voor het komende jaar worden in het

natuur
leven
technologie

Persbericht /
Nieuwe NLT-modules gecertificeerd

[Brechje Hollaardt]

Afgelopen schooljaar zijn vier vwo-modules voor NLT gecertificeerd. Harrie Eijkelhof, voorzitter van de Stuurgroep NLT, reikte op het Junior College van de Universiteit Utrecht de certificaten uit. In totaal zijn er nu 66 gecertificeerde modules, waarvan 25 voor havo en 41 voor vwo. Ze zijn tot stand gekomen in een samenwerking tussen scholen, universiteiten, hogescholen en kennisinstituten. Het Landelijk Coördinatiepunt NLT, de Stuurgroep NLT en externe experts hebben de modules beoordeeld op inhoud en didactiek. Docenten en leerlingen hebben de modules getest op uitvoerbaarheid. De modules die in schooljaar 2010/2011 gecertificeerd zijn, zijn: *Summer in the city* (vwo), *Kosmische straling* (vwo), *Proeven van vroeger* (vwo) en *Van HIV tot AIDS* (vwo). *Summer in the city* is ontwikkeld door Wageningen University en Gymnasium Apeldoorn, *Kosmische straling* door Stedelijk Gymnasium Nijmegen, NSG Groenewoud, Het Amsterdams Lyceum en Radboud Universiteit/Nikhef. De modules *Proeven van vroeger* en *Van HIV tot AIDS* zijn ontwikkeld door Junior College Utrecht en Universiteit Utrecht.

Informatie

Scholen kunnen met vragen over modules terecht bij de Regionale Vaksteunpunten NLT. Elk steunpunt heeft enkele modules onder zijn beheer. De steunpunten geven ook trainingen bij NLT-modules.
Alle NLT-modules staan op *www.betavak-nlt.nl*, evenals de contactgegevens van de steunpunten en hun scholingsprogramma's.



foto 1 De gecertificeerden

Over de auteur

Brechje Hollaardt is vanuit haar communicatiebureau *Hypertekst en Communicatie* (*www.hypertekst.nl*) betrokken bij onderwijsvernieuwingen in bèta en techniek, zoals voor het Platform Bèta Techniek en het Landelijk Coördinatiepunt NLT.
E-mailadres: *brechje@hypertekst.nl*

'Jaarplan 2011/2012' besproken dat op verzoek kan worden toegezonden. Hier bespreken we slechts de algemene doelstellingen van deze commissies, de belangrijkste aandachtspunten voor het tweede jaar, en bezien tevens een aantal dwarsverbanden.

Onderwijs

Deze commissie heeft zich, ingegeven door de grootte van de commissie en de breedte van de taakstelling, gesplist in drie subcommissies welke zich richten op de volgende deelaspecten:

- realisatie van doorlopende, sectoroverstijgende leerlijnen wiskunde (verbrokkelde leerlijnen leiden tot onnodige deficiënties);
- ontwikkelen van nascholingstrajecten voor alle typen docenten rekenen en wiskunde (blijvende professionalisering maakt het beroep aantrekkelijker);
- advisering over bestaande curricula op een betekenisvolle wiskunde en rekenen (eigentijds onderwijs, ook in vergelijking met het buitenland).

De commissie ziet zich geconfronteerd met veel aandacht in de politiek en de media voor het wiskundeonderwijs, vooral ten aanzien van het eerste en derde subthema. Zo heeft de huidige minister zich uitgesproken voor het verplicht stellen van wiskunde als eindexamenvak. De commissie blijft alert op deze ontwikkelingen, zal gevraagd en ongevraagd advies geven, onder andere middels publicaties in landelijke media en rechtstreekse contacten met het ministerie. Belangrijk in dit verband is het nemen van het voortouw in het opbouwen van adequate contacten met andere organisaties welke zich bewegen op het terrein van het wiskundeonderwijs teneinde ook hier uniformiteit te bereiken. Daarnaast is een duidelijk aandachtspunt voor het tweede jaar de aansluiting tussen vo en ho. De commissie zal zich ook krachtig inzetten voor kwaliteitsborging en certificering.

Onderzoek

Deze commissie, samengesteld uit vertegenwoordigers van alle Nederlandse universiteiten, heeft als doelstellingen:

- verhoging onderzoeksbudget voor de Nederlandse wiskunde, met name voortzetting van de vier wiskundeclusters (DIAMANT, GQT, NDNS+, STAR);
- streven naar grotere slaagkans en

verfijning van het subsidiestelsel van NWO in Vrije Competitie en Vernieuwingsimpuls;
- ontwikkelen van strategie en beleid rond het wiskunde onderzoek in Nederland, inclusief nieuwe onderzoeksprogramma's;
- gevraagd en ongevraagd adviseren van andere belanghebbenden in het veld;
- blijvende inzet voor financiering van de doelstellingen van het 'Masterplan Toekomst Wiskunde' (2008).

In het recente rapport 'Evaluation, conclusions and recommendations: Mathematics Clusters 2005-2010' worden de wiskundeclusters (DIAMANT, NDNS+, GQT, STAR) beoordeeld variërend van excellent tot exemplarisch. Voor NWO was dit aanleiding te besluiten tot voortzetting van de financiering van deze clusters, echter voor een beperktere periode (2 jaar) en met een kleiner budget. Dit laatste is mede veroorzaakt door de nieuwe plannen van het ministerie van ELI om onderzoek vooral plaats te laten vinden in het kader van de 10 'topsectoren'. Meer dan voorheen is het daarom zaak voor de commissie Onderzoek om adequaat in te spelen op deze ontwikkelingen, en dit zal dan ook het belangrijkste aandachtspunt zijn voor deze commissie. Hiertoe zullen ook nauwe contacten onderhouden worden met de commissie Innovatie.
In 2011 is ook de nieuwe landelijke onderzoeksschool WONDER gestart met haar activiteiten. Er zal een bestendige relatie tussen deze onderzoeksschool en de commissie Onderzoek worden aangegaan, teneinde de groei van WONDER te begeleiden.

Innovatie
In de politiek zien we momenteel een duidelijke verschuiving naar een sterkere focus van wetenschappelijk onderzoek op maatschappelijk relevante problemen. De commissie Innovatie is hiervoor goed geoutilleerd, met een mix van academische en industriële leden. De aandacht gaat vooral uit naar:
- innovatie in het bedrijfsleven helpen bevorderen, met speciale aandacht voor het MKB;
- vragen rondom innovatie beantwoorden via het Transferpunt Wiskunde en Innovatie (TWI);
- bekendheid geven aan toepassingen van wiskunde middels speciale outreach activiteiten zoals themadagen, business cases en publicaties;
- aansluiten bij grootschalige innovatieprogramma's, zoals de door het ministerie van ELI gedefinieerde 'topsectoren'.

Rode draad in deze thema's is het duidelijk maken van de rol die wiskunde kan vervullen in de praktijk en wat zij concreet kan bijdragen aan het algemene nut. We observeren een verdere groei van de eisen van de industrie, maatschappij en andere wetenschappelijke disciplines aan toepasbare wiskundige methoden. De door het ministerie van ELI gepresenteerde topsectoren zullen voor een groot deel de agenda van de commissie Innovatie dicteren in het tweede jaar, en hierbij zal tevens ondersteuning gegeven worden aan de commissie Onderzoek. Daarnaast zal het TWI verder worden uitgebouwd en een actieve rol gaan spelen.

Publicaties
De kleinste commissie, maar wel met een belangrijke missie: het bundelen van de bestaande activiteiten rond publicaties in wiskundig Nederland. Voornaamste aandachtspunten zijn:
- een efficiëntieslag maken met het uitgeven van tijdschriften die onder verantwoordelijkheid van KWG en NVvW vallen;
- streven naar verdere professionalisering van de tijdschriften, inclusief het verhogen van de aantallen abonnees.

Gedurende het eerste jaar is een analyse gemaakt van de verschillende publicaties, die in het tweede jaar gebruikt zal worden om te komen tot meer structuur, een betere integratie en een strikter financieel beleid. Met name voor *Pythagoras* zullen belangrijke beslissingen genomen dienen te worden, teneinde dit jongerentijdschrift een bestendige en financieel gezonde toekomst te kunnen garanderen. Een van de mogelijkheden die momenteel wordt bekeken is het onderbrengen van *Pythagoras* bij PWN om zodoende een betere balans te krijgen tussen het tijdschrift met zowel KWG als NVvW. In deze nieuwe opzet kan de commissie Publicaties de rol spelen van redactieraad, die momenteel ontbreekt. Daarnaast zal gestreefd worden naar een meer structurele oplossing voor zowel de dienstverbanden als de fysieke locaties van de verschillende publicaties. In het verleden werden hiervoor vaak ad hoc constructies bedacht, welke echter door PWN in meer permanente oplossingen kunnen worden omgezet.

Publiciteit
Rondom het thema publiciteit zagen we waarschijnlijk de grootste versnippering van activiteiten in het verleden. Dit werd mede gevoed door de vele doelgroepen waarop men zich richtte. De commissie richt zich dan ook op:
- structureren, coördineren en ondersteunen van publiciteit voor de wiskunde in brede zin: middelbare scholieren, het grote publiek, alsmede bedrijven en organisaties;
- inventariseren van bestaande publicitaire activiteiten met betrekking tot de wiskunde in Nederland;
- uitbouwen van goed lopende activiteiten, ontwikkelen van nieuwe initiatieven;
- zorgdragen voor continuïteit in de organisatie en de financiering van publiciteit;
- publicitair ondersteunen van de andere commissies van PWN.

De commissie heeft een breed scala van activiteiten gepland voor het tweede jaar. Er zal onder andere een overzicht worden gemaakt van bestaande initiatieven, en een loket wiskunde worden ingericht voor het informeren van journalisten. De commissie streeft ernaar in het tweede jaar de 'wiskunde blitz' te maken door het ontwikkelen van een grote landelijke activiteit met veel media-aandacht. Belangrijk aandachtspunt is ook uitbreiding van de commissie, teneinde alle geplande activiteiten adequaat op de rails te kunnen zetten.

Dwarsverbanden
De commissies zijn met grote zorg en breed samengesteld zodat 'de achterban' goed wordt gerepresenteerd. Op deze manier zijn mogelijkheden geschapen om op vele fronten tegelijk slagvaardig te werk te gaan. Het verenigen van al deze aspecten binnen één enkele organisatie is uniek, en schept additionele mogelijkheden om tevens aan de vele dwarsverbanden te werken.
In speciale bijeenkomsten met alle commissievoorzitters zijn dwarsverbanden

geïdentificeerd. Dit heeft geleid tot bilateraal overleg tussen de verschillende commissies, welke in het tweede jaar zullen worden geïntensiveerd. Hierbij dient gedacht te worden aan onder andere:

- publiciteit van de verschillende commissies;
- samenwerking intensiveren tussen kennisinstellingen, bedrijven en maatschappelijke instellingen, ook op onderwijsgebied;
- leerlingen al vroeg laten ervaren wat hen te wachten staat in een later beroep;
- publicaties nadrukkelijk inzetten voor onderwijs, innovatie, publiciteit;
- meer aandacht genereren voor didactiek van de wiskunde door samenwerking tussen de commissies Onderzoek en Onderwijs;
- gezamenlijk optrekken van Onderzoek en Innovatie richting de topsectoren van het ministerie van Economische Zaken, Landbouw en Innovatie.

Eerste resultaten

PWN profileert zich vanaf het allereerste begin als een krachtige pleitbezorger voor de discipline wiskunde. Het momentum van de in de afgelopen jaren bereikte consensus middels discussies, studies en rapporten is omgezet in verdere daadkracht. Voor de wiskundigen in Nederland betekent het ook een aanpassing, het leren omgaan met het hebben van één landelijke organisatie die hun belangen behartigt.
Voor alle 5 commissies was een initiële agenda opgesteld van taken en aandachtspunten, welke zeer complex en divers zijn. In het eerste jaar van het bestaan van PWN is een planning gemaakt voor het aanpakken van deze taken, zodat deze uitgevoerd kunnen worden: wat zijn de prioriteiten, wanneer wordt welk punt aangepakt, worden er kleinere werkgroepen geformeerd om deze punten te adresseren, wie krijgt de verantwoordelijkheid hieromtrent, hoe wordt uitvoering gegeven aan de bevindingen. Alle commissies hebben een dergelijke planning afgeleverd en afgestemd met het bestuur en de directeur. Vervolgens is begonnen met de uitvoering. Dit heeft o.a. geleid tot de volgende wapenfeiten:

- De introductiebijeenkomst op 14 mei j.l. werd druk bezocht; de resultaten van de discussies zijn verwerkt in de plannen van de commissies.
- Er is een professionele trailer geproduceerd die ingezet kan worden op middelbare scholen: 'wiskunde is overal' (beschikbaar op de website: *www.platformwiskunde.nl*).
- Er zijn kansrijke ideeën ontwikkeld voor een efficiëntieslag binnen de wiskundige publicaties.
- Er is veel meer samenhang en overleg tussen verschillende publicitaire activiteiten (zo heeft de commissie Publiciteit nauwe contacten onderhouden met de organisatie van IMO 2011).
- PWN heeft de aanmoedigingsprijzen van de Koninklijke HMW voor haar rekening genomen vanaf dit jaar.
- De commissie Onderzoek heeft aanvragers in de Vernieuwingsimpuls (vooral Vici) begeleid middels oefensessies.
- Er zijn plannen gemaakt voor een gecoördineerde effort van 'de wiskunde' richting de ELI-topsectoren.
- Het Transferpunt Wiskunde en Innovatie is gestart met haar activiteiten.
- Er is door de commissie Onderwijs adequaat gereageerd op onderwijsnieuws in de media, o.a. op het in juni verschenen CPB-rapport 'Slecht wiskundeonderwijs schaadt economie'.
- Er wordt veel gesproken en in breed (landelijk) verband gediscussieerd over onderwerpen die tot nog toe onbesproken bleven

De PWN-website, *www.platformwiskunde.nl*, neemt inmiddels een centrale plaats in bij het functioneren van PWN. Als men eenmaal zijn weg weet te vinden naar deze bron van informatie en uitwisseling van kennis, dan is communicatie met de achterban een stuk eenvoudiger. Maar ook voor anderen dan onze achterban is de website een belangrijke bron van informatie.

Volle kracht vooruit

Naast de organisatorische ontwikkeling, welke vooral van belang was gedurende het eerste jaar, is vooral ook de strategische ontwikkeling van PWN van uitermate groot belang. Het platform is absoluut gebaat bij een continue strategische ontwikkeling, aangezien besluitvorming continu plaatsvindt en vaak directe actie vergt teneinde effectief te kunnen zijn.
Strategische ontwikkeling genereert een agenda van belangrijke kwesties en mogelijkheden, en geeft de richting aan, zoals onder andere is gebeurd in het slotdocument van het oprichtingsbestuur. Dit zal op een continue wijze gebeuren, middels geregeld overleg tussen bestuur, directeur en commissievoorzitters.
Het formuleren van een strategie is een uitdaging voor het platform, het omzetten van de gemaakte plannen naar de realiteit des te meer. Veranderingen in de manier van werken binnen wiskundig Nederland kunnen moeizaam verlopen, mede omdat het door het platform bereikte resultaat direct afhangt van het succes van de individuele commissies en disciplines binnen de beroepsgroep. Voorbeelden van mogelijke strategische keuzes zijn wijzingen in het model van het 'wiskundige bedrijf' (denk maar eens aan kennisvalorisatie als derde kerntaak van universiteiten, en de implicaties van het rapport over rekenonderwijs op de basisschool) en het betreden van nieuwe markten voor wiskundigen. Er zal gezocht worden naar andere manieren om de beroepsgroep te ondersteunen bij hun professionele ontwikkeling.
Belangrijk hierbij is te weten waar wiskundigen tegen aan lopen, en welke veranderingen men zelf voor ogen heeft. Welke doelen zouden we willen bereiken? Deels zijn deze vragen beantwoord in de onderzoeken die de afgelopen jaren hebben plaatsgevonden, maar de wereld is dynamisch van aard (met als lichtend voorbeeld de recente verschuiving van aandacht naar de topsectoren van het ministerie van ELI), en we zullen ons deze vragen voortdurend blijven stellen, en de strategische ontwikkeling hierop baseren.
In deze strategische ontwikkeling worden de wensen en doelen teruggevonden, samen met een visie en aanpak.
Ook de resultaten van het Deltaplan voor de bètastudies, uitgevoerd door het Platform Bèta Techniek (PBT) in de afgelopen 6 jaar, zijn van groot belang voor het Platform Wiskunde Nederland. PBT heeft vele initiatieven ontplooid in primair, voortgezet en hoger onderwijs, en de resultaten zijn zichtbaar in op allerlei punten verbeterde cijfers betreffende de participatie van bètastudies en oplopende studentenaantallen. Het rapport 'Zekeringen voor de toekomst' van PBT (december 2010) geeft een overzicht van behaalde resultaten en formuleert acties voor de

toekomst. De commissie Onderwijs kan hierbij aansluiten, en de aanbevelingen overnemen ten aanzien van het wiskunde-onderwijs. Ook kan gedacht worden aan een nauwere samenwerking met het PBT. Het is ook van groot belang voor zowel het platform als voor wiskundig Nederland dat er een grote mate van betrokkenheid van alle wiskundigen is bij de activiteiten van PWN. Nog meer dan voorheen zullen onderzoekers en leraren betrokken worden bij de plannen en initiatieven van PWN. Daartoe zal het platform actief deelnemen aan de jaarlijkse bijeenkomsten NWD en NMC, en op deze manier de achterban informeren over ontwikkelingen binnen de commissies. Middels de website en nieuwe media zoals Twitter, Facebook en LinkedIn zal continue discussie en informatie mogelijk zijn. In dit verband fungeert Twitter meer als een bron van informatie, terwijl via speciale LindkedIn-groepen (op te zetten in het tweede jaar) de discussie uitgelokt zal worden.
In het tweede jaar zal ook meer aandacht besteed worden aan het ontwikkelen en uitwerken van nieuwe ideeën binnen alle commissies. In het afgelopen jaar is gebleken dat het lastig is om 'out of the box' te denken, derhalve zullen hiervoor nieuwe stimulansen worden gegeven. Er zal veel ruimte en aandacht gegeven worden hieraan, iedere commissie zal nadrukkelijk worden gevraagd nieuwe ideeën aan te dragen. Zulke initiatieven zijn van groot belang voor het welslagen van de missie van PWN.

Ook de blik naar buiten is een belangrijke kwestie voor PWN. In het eerste jaar is hier al een begin mee gemaakt, en dit zal in het tweede jaar alleen maar uitgebreid worden. Hierbij dient gedacht te worden aan het opzetten van contacten met andere platforms en beroepsorganisaties zoals IPN, NgI, NIBI, zowel op het gebied van het uitwisselen van ervaringen als het samen optrekken om onze doelen te verwezenlijken. Ook kijken we nadrukkelijk naar ontwikkelingen in de ons omringende landen:

- Wiskunde-strategie discussie in Duitsland (de PWN-directeur is me-deauteur van het rapport 'Transfer der Mathematik in die Anwendung);
- Knowledge Transfer Networks in Engeland, met name het KTN 'Mathematics in Industry' geleid door het Smith Institute;
- Forward Look project 'Mathematics and Industry' van de ESF en EMS, hetgeen o.a. heeft geleid tot een eindrapport en het boek 'Success stories Mathematics in Industry' verschenen bij Springer-Verlag (de PWN-directeur is een van de editors);

Financiële uitdagingen

Naast de inhoudelijke uitdagingen zijn er ook financiële uitdagingen. Omdat PWN zich een permanente positie wil verwerven binnen de wiskundewereld, is het noodzakelijk dat er gezorgd wordt voor een blijvende stroom van financiële middelen, naast de bijdragen van de wiskunde-instituten, CWI en NWO.
In het slotdocument werd al een aantal mogelijkheden aangegeven. In het tweede jaar zal hier extra aandacht aan worden besteed.

Noten

[1] Zie: *www.oecd.org/dataoecd/47/1/41019441.pdf*
[2] Zie: *www.ceremade.dauphine.fr/FLMI/*

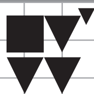
Lijst met afkortingen

CWI = Centrum voor Wiskunde en Informatica
DIAMANT = Discrete, Interactive and Algorithmic Mathematics, Algebra and Number Theory
ELI = ministerie van Economische Zaken, Landbouw en Innovatie
EMS = European Mathematical Society
ESF = European Science Foundation
GQT = Geometry and Quantum Theory
HMW = Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen
ICT = Informatie- en Communicatie Technologie
IMO = International Mathematical Olympiad
IPN = ICT-onderzoek Platform Nederland
KNAW = Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen
KWG = Koninklijk Wiskundig Genootschap
MKB = Midden en Klein Bedrijf
NDNS+ = Nonlinear Dynamics of Natural Systems
NIBI = Nederlands Instituut voor Biologie
NAW = Nieuw Archief voor Wiskunde
NgI = Platform voor ICT-professionals (voorheen: Nederlands Genootschap voor Informatica)
NMC = Nederlands Mathematisch Congres
NVvW = Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
NWO = Nederlandse organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek
OCW = ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen
OECD = Organisation for Economic Co-operation and Development
PBT = Platform Bèta Techniek
PWN = Platform Wiskunde Nederland
STAR = Stochastics - Theoretical and Applied Research
TWI = Transferpunt Wiskunde en Innovatie
WONDER = Wiskundig Onderzoek

Over de auteur

Wil Schilders studeerde van 1974-1978 wis- en natuurkunde aan de Radboud Universiteit te Nijmegen. In 1980 behaalde hij zijn PhD in de numerieke wiskunde aan het Trinity College in Dublin, waarna hij ging werken bij Philips en NXP Semiconductors (tot 2010). Sinds 1999 is hij deeltijd hoogleraar 'numerieke wiskunde voor de industrie' aan de TU/e. Daarnaast is hij directeur van Platform Wiskunde Nederland (PWN), president van het European Consortium for Mathematics in Industry (ECMI) en hoofdredacteur van *Nieuw Archief voor Wiskunde*.
E-mailadres: *bureau@platformwiskunde.nl*





Jaarrede 2011

[Marian Kollenveld]

Welkom
Dames en heren, hartelijk welkom, fijn dat u er weer bent. Het lijkt nog maar zo kort geleden dat ik u zag vertrekken, het hoofd vol van wat u gehoord had en de tassen vol van wat u gekregen of gekocht had. En nu bent u er alweer, met een nog lege tas (behalve de vroege shoppers) en een ontvankelijk gemoed, mag ik hopen.
En zelfs met nog meer dan de vorige keer. Vandaar dat we weer een ruimere behuizing hebben moeten zoeken. Dat probleem heeft Marjanne Lambriex overigens met vreugde opgelost, en we zijn heel blij dat we nu hier in het Ichthus College, de school van Gert de Kleuver, oud-voorzitter van de redactie van *Euclides*, een gastvrij onthaal hebben gevonden. Modern, licht, en als het bevalt, hopelijk voldoende groot voor de komende jaren. Ik weet wel dat iemand met een beetje ambitie in Carré of Ahoy wil staan, maar wij vinden dit al heel sjiek.
Bijzonder verheugend is naast de gezellige aanwezigheid van al die bekende oude rotten de toenemende belangstelling van studenten en lio's te noemen. Die laatsten volgen momenteel voor de tweede keer een eigen lio-programma, een soort *kinderneven-dienst*, als ik zo oneerbiedig mag zijn.
En ook de nieuwe leden tellen lekker aan, vooralsnog compenseren zij het natuurlijk verloop van de gepensioneerden, maar hoe lang dat blijft, is ongewis.

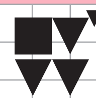
Dit wordt niet alleen een positief verhaal, het spijt me.

Het schrijven van de jaarrede gaat altijd samen met een moment van reflectie. Waartoe zijn wij op aarde, u kent dat misschien wel, in het zicht van de eeuwigheid is alles nietig. En ik lees dan wat in eerdere jaarredes, dan is er tenminste iemand die dat doet, en je kunt daar de ontwikkelingen aardig volgen.

Van Assepoester tot prinses?
De afgelopen jaren heb ik u verteld over de kentering die er had plaatsgevonden: waren we in de ogen van de beleidsmakers eerst die lastpakken die altijd zeurden om meer uren en die dus wel een toontje lager konden zingen, met als gevolg forse reducties in de omvang van wiskunde. Nu zijn wij plots de hoeders van de kernwaarden van het onderwijs, de redders van de natie, en is wiskunde bij de Onderwijsraad, het Ministerie en de Tweede Kamer heel belangrijk. Met rekenen als makkelijk onder te schuiven kindje.
Alles gaat dus naar wens zou je zeggen, maar ken uw klassieken! Afhankelijk van uw referentiekader roep ik in uw herinnering Vrouwtje Piggelmee, of de Japanse Steenhouwer van Multatuli. Beiden gaven trouwens aan dat het slecht kan aflopen met vervulde wensen.

Kennis of wijsheid?
Een van de aardige dingen van ouder worden is dat je zicht krijgt op langere lijnen. Je ziet het slingeren van de tijdgeest als het ware… de wisselwerking van de wal en het schip.
In mijn jeugd waren de leitjes en griffels op mijn dorpsschooltje net afgeschaft, was de s-c-h-spelling in de leesboekjes door de juf zelf weggekrast – want het was crisis, ook toen – en werd er veel in mijn hoofd gestampt dat er nu nog inzit. Soms gekoppeld, soms als los feit: *Henoch wandelde met God en stierf niet*.
Op de hbs was het niet veel anders.
Zo weet ik nog de intrigerende zin uit mijn geschiedenisboek – *Fundamenten en Mijlpalen*, deel 1: *Geschiedenis wordt bestudeerd om onze eigen tijd en onze eigen beschaving beter te leren begrijpen*. De wijsheid daarvan heb ik later ingezien. Of bij Latijn: *De dichters van het land noemen de roos het vaderland*. De wijsheid daarvan heb ik helaas nooit ingezien.
En dan de rijtjes… Bij aardrijkskunde: *Aruba, Curaçao, Bonaire, Saba, Sint Eustacius, Sint Maarten* en *tarwe, rogge, haver, gerst*. Bij Duits: *mit, nach, nebst, …* of *durch, für, ohne, um, …*
Een voordeel van al dat stampen was een goed werkend geheugen; een nadeel het vrij geringe beroep op het eigen denkvermogen, het zelf ontdekken van patronen en structuren en samenhang. Veel kennis dus, weinig wijsheid.

De tijdgeest
Het is niet zo gek dat – als gevolg van maatschappelijke ontwikkelingen – uit het hoofd leren steeds meer in diskrediet raakte. Enerzijds is het nogal autoritair en dat vond men niet meer gepast, en anderzijds verschoof de aandacht van leerstof-gericht naar leerling-gericht onderwijs.
De toenemende beschikbaarheid van internet met het oneindig grote externe geheugen voedde daarbij in het algemeen de gedachte dat kennis snel verouderde en de notie 'Waarom zou je zelf iets leren als je alles kunt opzoeken' kreeg de overhand. Ook een beetje in het onderwijs. Met als hoogtepunt het idealtype van de auto-



noom zelflerende leerling uit de tweede fase, waarmee de slinger zijn uiterste stand wel had bereikt.
Tegen de tijdgeest is het lastig roeien en ik ga hier nu niet zeggen welke verstandige, relativerende opmerkingen we daar altijd over hebben gemaakt. Dat weet u zelf wel.
Het is goed dat er een kentering is opgetreden en dat we inmiddels het nut van een goede docent en de waarde van kennis in het eigen hoofd weer wat meer inzien.
Ik zeg graag Robbert Dijkgraaf na, dat creativiteit en innovatie niet kunnen bestaan zonder feitenkennis. Google kan niet zelf iets verzinnen door te combineren wat er allemaal in de diverse databases staat; Google weet niet wat waar en wat onzin is. Maar de googlende leerling zonder eigen kennis weet dat evenmin!

De belangrijkste opdracht aan het onderwijs is leerlingen zo goed mogelijk toe te rusten op een toekomstige wereld waaraan ze als volwassen burger moeten deelnemen. Alleen feiten kennen is dan niet genoeg, maar alleen meningen hebben ook niet. Dat betekent niet terug naar enkele gigabyte aan feiten stampen, maar proberen in het hoofd van de leerling een dusdanig web te weven van basiskennis, aangevuld met gestage oefening in methoden van gezond verstand en logisch redeneren, dat het mogelijk wordt nieuwe kennis te vangen en op zijn merites te beoordelen, of – heel belangrijk – zélf te genereren.

Wat betekent dit voor het onderwijs in de wiskunde?

Dat is de grote vraag. In eigen huis probeert de hbo-werkgroep een antwoord te formuleren. De werkgroep is van plan hierover medio volgend jaar een congres te houden met als werktitel: Wat willen we met wiskunde op het hbo?
Verder zien we dit terug in de hernieuwde aandacht voor rekenen in het gehele onderwijs, en in het voortgezet onderwijs zijn er de nieuwe programma's voor de bovenbouw havo/vwo van cTWO, die haar visiedocument de titel meegaf *Rijk aan betekenis*, met daarin een pleidooi voor betekenisvol wiskundeonderwijs en ruim aandacht voor denkactiviteiten.
Na de Pep van 2007 met een aanscherping van de algebra is dat in de cTWO-programma's nog verder doorgezet.
Waar we natuurlijk wel voor moeten oppassen is dat de slinger weer niet te ver doorslaat. Dus maar blijven oefenen in verstandige, relativerende opmerkingen.

'Rekenen is niet altijd wiskunde' las ik in een recente brief van de minister naar de Tweede Kamer, met 'altijd' tussen haakjes. Dus: soms wel.
Ons standpunt is steeds geweest dat rekenen niet hetzelfde is als wiskunde, en dat het onderhouden van de basisvaardigheden van het rekenen bij *meerdere* vakken moet plaatsvinden. We participeren daarom in een project 'Rekenen over de vakken heen', met meerdere vakverenigingen binnen het Platform Vakinhoudelijke Verenigingen Voortgezet Onderwijs.
Daarnaast zijn we bezorgd dat de grote aandacht voor het rekenen (met de toetsing in de bovenbouw van havo en vwo) ten koste gaat van de tijd die aan wiskunde kan worden besteed. Uit een enquête van de *WiskundE-brief* bleek dat veel wiskundecollega's worden ingezet voor de rekenlessen, wat wel begrijpelijk is, maar we zijn fel gekant tegen het geheel gratis onderbrengen van het rekenen bij wiskunde. Dat is een óók zaak voor andere vakken. En we hebben dit standpunt uiteraard op het Ministerie van Onderwijs en andere zaken duidelijk gemaakt.

De toetswind waait

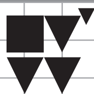
Voeg daaraan toe het toetsen van tussendoelen aan het eind van de onderbouw, gelukkig alleen diagnostisch, en dan merk je dat de toetswind sterk is opgestoken. Vanuit het oogpunt van de overheid begrijpelijk: het is een van de weinige instrumenten die ze kunnen inzetten. En er is niets tegen toetsen, maar toetsen en examineren mag nooit ten koste gaan van het leren van de leerling, waar het ons toch allemaal om te doen is.

Zo zijn er in de studiedag deze twee grote inhoudelijke thema's, die het onderwijs in de toekomst belangrijk mede zullen kunnen bepalen. Het rekenen in het hele onderwijs, en de nieuwe wiskundeprogramma's in de bovenbouw havo en vwo, waarbij de voorgestelde aanscherping van de regels voor toetsing en examinering ook een rol spelen.

Ik opper wat vragen.

- Wat betekent het voor de levensvatbaarheid van een moeilijk vak als wiskunde B dat het centraal examencijfer toch wel minstens 5,5 moet zijn om te kunnen slagen? (maximaal één 5 voor de kernvakken mag). Nu vinden we 30% onvoldoendes niet slecht, maar 30% gezakte leerlingen is iets heel anders!





- Heeft dat als gevolg dat er eindelijk weer voldoende contacttijd komt (wat de Onderwijsraad ook voorstaat)? Of gebeurt het gewoon, en zien we wel wie daarvan de 'schuld' zal krijgen?

- Wat betekent een door de Onderwijsraad voorgesteld verplicht vak wiskunde voor de havo voor de instroom vanuit de vmbo-sectoren zónder wiskunde en de uitstroom (nu ca. 10%) naar de vele hbo-sectoren waar men wiskunde níet als eis heeft?

Laat u informeren, praat mee
De besluitvorming hierover vindt nu plaats, aan al die overlegtafels waar we aanwezig zijn. Het komt dus mooi uit dat u hier nu bent! Laat u informeren en geef ons uw mening, zodat we mede namens u kunnen spreken. Wacht daar niet mee tot het over een jaar of vijf tegenvalt om dan te zeggen 'Waarom is mij niets gevraagd', zoals ik al eens meemaakte. Een beetje professional, zoals Marjanne Lambriex straks vast zal zeggen, is op de hoogte van de ontwikkelingen en praat mee over zijn vak. Grijp uw kans, daar is uw vereniging voor!

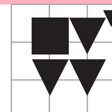
Het rondje langs de velden
Euclides – Zoals u al heeft kunnen lezen heeft Klaske Blom veel korter dan haar en ons indertijd voor ogen stond het hoofdredacteurschap kunnen combineren met een veeleisende baan in het onderwijs. Dat was jammer, maar wel begrijpelijk; soms moet je kiezen. We hebben inmiddels met veel dank, bloemen en cadeautjes – en ook een beetje weemoed – afscheid van haar genomen.
En zoals dat gaat, meteen een opvolger verwelkomd, in de persoon van Marjanne de Nijs, die al in de redactie zat. We zijn heel blij dat Marjanne deze taak op zich wil nemen en we hebben er alle vertrouwen in dat zij – samen met de redactie – erin zal blijven slagen een blad te maken dat u graag uit de wikkel haalt. Welkom Marjanne!
De redactie is overigens op zoek naar versterking, allereerst naar mensen uit het beroepsonderwijs, dus als het u iets lijkt, meld u aan.
De redactie is vandaag actief aanwezig met bloknoot of eigentijdsere middelen, om deze dag uitvoerig te kunnen verslaan in het blad. In combinatie met het materiaal op de website heeft u dan de mogelijkheid om een en ander nog eens na te lezen.

Federatie onderwijsbonden – Zoals u weet zijn we al een paar jaar lid van de Federatie Onderwijsbonden, die weer is aangesloten bij de CMHF – daaraan dankt u mede uw prettig lage contributie. De afgelopen jaren was Pim van Bemmel onze vertegenwoordiger in de federatie en hij wordt opgevolgd door Dick Ottenbros, die een ruime ervaring heeft in de medezeggenschap. We denken met Dick een goede opvolger te hebben gevonden. Het is redelijk gespecialiseerd terrein; niet ieders kopje thee.
We komen daarom graag in contact met leden met belangstelling op dit terrein voor een mogelijk nieuw op te richten resonansgroep vakbondszaken – om Dick wat te ondersteunen in zijn werk voor de vereniging.

Helpdesk – Het afgelopen jaar hebben wederom maar weinig mensen gebruik gemaakt van de individuele rechtspositionele helpdesk. Als dat is uit onbekendheid, is dat jammer. U kunt er namelijk ook terecht voor vragen, en u hoeft niet te wachten tot u ontslagen dreigt te worden. Maar als dat is omdat er inderdaad weinig problemen zijn, is het natuurlijk heel plezierig.
Het gevolg is wel dat het bestuur een afweging moet maken om het abonnement voort te zetten, dan wel het risico in eigen beheer te nemen, wat de afgelopen jaren aanmerkelijk voordeliger zou zijn geweest. Maar… resultaten uit het verleden… Daarmee word je wel kwetsbaar, een lange slepende zaak kan dan de reserves snel opsouperen.

Leuke dingen voor de leden
En zonder reserves geen geld voor leuke dingen. De oogst van dit jaar:
- Voor leden een speciale aanbieding voor gratis deelname aan *Wisbase*, de digitale toetsenbank.
- Voor leden een eigen hoekje op de site van *RekenBeter*.
- Veel blije gezichten bij de IMO. Dat was een groot succes waaraan veel collega's hebben meegewerkt. Er draait vandaag een film, waar u het allemaal nog eens kunt terugzien.
- Een opgefriste Kangoeroe-site.
- De WSP (maar dat hoort u straks).

En ook leuk – voor het bestuur – en geheel op vrijwillige basis heeft Harm Jan Smid met grote vasthoudendheid de verzameling 'schoenendozen' met daarin het papieren verleden van de vereniging – dik 80 jaar aan allerhande papieren en papiertjes – gezet in een echt archief. Die dozen waren

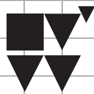


afhankelijk van de toenmalige secretaris meer of minder goed geordend. Gelukkig was Jan Maassen zowel lang secretaris als erg ordelijk, dus hebben we geen spijt van het erelidmaatschap dat we hem bij zijn afscheid hebben verleend.
We zijn Harm Jan erg dankbaar voor zijn inspanning en gaan op zijn advies op zoek naar een echte plek, waar het ook algemeen toegankelijk wordt. Een kelderbox of een zolderverdieping is dat maar ten dele.

U merkt dat de vereniging – ondanks die hoge leeftijd – nog steeds midden in het wiskundeleven staat. Het bestuur zal zich blijven inzetten voor het waarborgen en versterken van de positie van het vak wiskunde en de wiskundeleraar in het voortgezet onderwijs.
Een bestuur kan al die ontwikkelingen en activiteiten nooit alleen aan. We zijn trots op al die mensen in de vereniging die zich voor de goede zaak willen inzetten.
We hebben elkaar nodig, samen staan we sterker.
Ik wil dus graag besluiten met alle vrijwilligers hartelijk te danken voor hun inzet. En ik wens u en ons een goed toekomst met veel mooi wiskundeonderwijs.

Enne … volgt u ons al op Twitter?
Dank u wel!





Van de bestuurstafel

[Henk Rozenhart]

De NVvW zoekt talent!

Het bestuur van de vereniging is op zoek naar jou!
We willen nadrukkelijk kennis maken met mensen, die vinden dat de docent zelf het heft in handen moet hebben bij de vernieuwing en de inrichting van het onderwijs. Ben jij van mening dat dat een goede zaak is, laat dan van je horen. Want zoals je waarschijnlijk al gehoord of gelezen hebt, heeft op 1 oktober 2011 het officiële startschot geklonken voor de **Onderwijscoöperatie**.
Maar wat is dat nu precies die Onderwijscoöperatie en wat gaat deze coöperatie doen? De Onderwijscoöperatie is een door de overheid ingesteld samenwerkingsverband van de grote beroepsverenigingen die in het onderwijs werkzaam zijn. We moeten hierbij onder andere denken aan de vakbonden en de vertegenwoordigers van de vakinhoudelijke verenigingen.
Het doel: **zorgen voor een krachtige beroepsgroep**.
'Van u, voor u en door u', dat is het motto. De leraar moet weer het heft in handen krijgen, moet zichzelf weer verantwoordelijk voelen en zijn voor de veranderingen binnen het beroep. In deze bijzondere organisatievorm werkt de coöperatie hand in hand met de mensen die zij vertegenwoordigen. Dat zijn alle leraren in het basis-, en voortgezet onderwijs, het beroeps- en hoger onderwijs. Niet eerder werkten beroepsverenigingen zo eendrachtig samen om dit te verwezenlijken. Een sterke beroepsgroep, die zo breed gedragen wordt als de Onderwijscoöperatie, is niet alleen een steun en baken voor alle leraren in Nederland, maar wordt ook een gezaghebbende gesprekspartner voor de politiek en het onderwijsveld.
Een initiatief dat door de NVvW van harte wordt ondersteund. Onder het moto 'de onderwijs coöperatie is van en voor ons' zullen wij als vakinhoudelijke vereniging op allerlei fronten een steentje gaan bijdragen aan de werkzaamheden die deze coöperatie gaat ontwikkelen.

Drie speerpunten van de Onderwijscoöperatie

Alleen goede leraren kunnen zorgen voor goed onderwijs. Om die kwaliteit te waarborgen richt de Onderwijscoöperatie zich op drie elkaar versterkende punten:

- *De bekwaamheid van de leraar*. De Onderwijscoöperatie helpt om kaders te stellen en normen te ontwikkelen die de kwaliteit van het vak waarborgen. Dat gaat over vragen als: Wat moet een leraar precies kennen en kunnen om een goede leraar te zijn? Welke opleidingen en nascholingscursussen zijn belangrijk? Ook het zorgen voor een lerarenregister als belangrijk onderdeel van de beroepskwaliteit hoort daarbij.
- *De professionele ruimte van de leraar*. De Onderwijscoöperatie wil werken aan versterking van de positie van de leraar in de onderwijspraktijk. Krijgt hij ruimte om als professional zijn vak goed uit te oefenen? Welke steun heeft hij nodig en hoe kan hij zich verder ontwikkelen?
- *Een goed imago van het beroep*. Een goede leraar die ruimte krijgt om zijn vak professioneel uit te oefenen is het fundament van een goed imago. Maar er is meer voor nodig om dat imago uit te dragen. De Onderwijscoöperatie maakt zich er sterk voor.

Een uitnodigend lerarenregister

Een lerarenregister is belangrijk in de keten van activiteiten om de beroepskwaliteit te waarborgen, net als dat geldt voor bekwaamheidseisen of goede lerarenopleidingen. In een register wordt het onderhouden van bekwaamheid zichtbaar. De Onderwijscoöperatie begint daarom met de instelling van een landelijk lerarenregister. Leraren die zich willen registreren, moeten voldoen aan een aantal harde kwaliteitseisen, zoals type opleiding en een minimaal aantal lesuren. De inschrijving is gratis en gebeurt op basis van vrijwilligheid. Het register moet leraren uitnodigen om te professionaliseren; het doet een appel op hun beroepstrots. In het schooljaar 2011 kunnen de eersten zich registreren, te beginnen met onder meer de leraren algemene vakken uit het voortgezet onderwijs. Het lerarenregister en de kwaliteit van de docent, die in dit register wordt geborgd, blijven natuurlijk speerpunten van de NVvW.
Via het WiVa-rapport, waarover u al veel heeft gelezen in *Euclides* gaat de NVvW rechtstreeks invloed uitoefenen op de implementatie van dit register. Het WiVa-rapport zal daarbij als uitgangspunt dienen en in overleg met andere leden van vakinhoudelijke verenigingen zullen wij er op toezien dat dit register doet wat wij

vinden dat het moet doen. Namelijk vakkennis voorop, gevolgd door goede na- en bijscholing.

Benut de kracht en kennis van elkaar

Leraren zijn er in alle soorten en maten. Van een remedial teacher in het basisonderwijs tot een leraar Grieks op het gymnasium. Om hun verschillende ervaring en expertise tot recht te laten komen wil de Onderwijscoöperatie alle leraren nauw betrekken bij onderwerpen die ertoe doen. Om dat zo praktisch mogelijk te regelen, komen er commissies van leraren. Die kunnen bijvoorbeeld adviseren over de criteria van het lerarenregister of het nascholingsaanbod. Alle onderwerpen die te maken hebben met de beroepskwaliteit kunnen zij ter hand nemen (***zie kader***).

Belangrijke onderwerpen voor alle leraren – dus ook voor de Onderwijscoöperatie – waarover zij zich in commissieverband kunnen buigen:

- Het beroepsprofiel: alles wat een leraar moet kennen en kunnen om zijn vak uit te oefenen.
- Kwalificatiestructuur: alle kennis en vaardigheden, inclusief diploma's, die vereist zijn voor het beroep.
- Lerarenregister: welke criteria voor registratie, met welk nascholingsaanbod de bekwaamheid op peil kan worden gehouden.
- Kwaliteitsverbetering van lerarenopleidingen.

Bij alle activiteiten worden zo veel mogelijk leraren ingezet. Daarmee is de belangrijkste boodschap van dit stukje: *Leraren gezocht!* De commissies worden bemand en aangestuurd vanuit de deelnemende organisaties van de Onderwijscoöperatie. Dat werkt snel, want deze organisaties kunnen via hun eigen netwerk en ledenstructuur zo de juiste leraren benaderen voor de bemensing van een commissie. Er zal dus regelmatig een beroep gedaan worden op de NVvW om mensen te noemen die in een commissie kunnen plaats nemen.

Dus…

Dus heeft u ideeën over bovenstaande onderwerpen, meldt u dan bij de secretaris van de NVvW (e-mailadres: *secretaris@nvvw.nl*). Want een goede vertegenwoordiging vanuit de NVvW draagt ook bij aan goed (wiskunde)onderwijs. Het spreekt dat er voor gedane werkzaamheden ook een beloning gegeven wordt, die in verhouding is met deze werkzaamheden. U kunt daarbij denken aan door school verleende faciliteiten, reiskostenvergoeding, vacatiegelden en dergelijke.



Mededeling / De NVvW twittert

Twitter

De NVvW heeft een Twitter-account: **@NVvWiskunde**
Iedereen kan een eigen Twitter-account aanmaken via *www.twitter.com*. Daarna is het mogelijk de via Twitter gepubliceerde berichten van de NVvW te 'volgen'.
De Twitter-berichten van de vereniging zijn ook te lezen via:
http://twitter.com/NVvWiskunde

Forum

Uiteraard kunnen ideeën, meningen e.d. ook worden uitgewisseld via het Forum op de website van de NVvW. Er zijn de volgende 'deelfora': Algemeen, Lezersreacties *Euclides*, Examenforum, HBO-forum.
Kies hiervoor:
www.nvvw.nl/forum.html

Meet je Rekenkracht met Rekenbeter!

WWW.REKENBETER.NL

[Sieb Kemme]

Doordenker 87-3

Een verjaardagsopgave
Henk en Ingrid zijn broer en zus en zijn op dezelfde dag jarig.
Henk is ouder dan Ingrid.
Ze hebben elk een speciale 'verjaardags-spaarpot'.
Elk jaar krijgen ze in deze spaarpot een aantal euro's erbij dat gelijk is aan hun leeftijd.
En zo verandert alleen op hun verjaardag het bedrag in deze spaarpotten.
Als ze 18 zijn, mogen ze de inhoud van de spaarpot hebben.
Gisteren waren ze jarig. Toen had Henk € 84,00 meer dan Ingrid.
Een paar jaar geleden was dat verschil nog € 49,00.
Hoe oud zijn Henk en Ingrid gisteren geworden ?

Euclides-rekenaars
De oplossing van deze Doordenker kunt u **tot 8 januari a.s.** kwijt in een forum op de website van *Rekenbeter.nl* (*www.rekenbeter.nl/Euclides*).

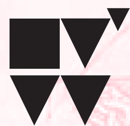
Om op dit forum te komen meldt u zich aan bij « *www.rekenbeter.nl* » als lezer van *Euclides*. U komt dan in een aparte groep terecht met een eigen klassement. Dagelijks ontvangt u een mail met daarin een link naar de dagelijkse rekenopgaven. De prestaties van deze *Euclides*-rekenaars worden on line in een apart klassement bijgehouden op basis van het percentage goed beantwoorde opgaven in combinatie met de snelheid waarin ze zijn opgelost.

Doordenker 1 en 2
Door omstandigheden was het forum niet direct beschikbaar bij het uitkomen van *Euclides* 87-1. Dat is zo snel mogelijk opgelost en inmiddels kunt u al twee maanden actief mee doen.
Om toch alle rekenaars de tijd te geven mee te puzzelen is er wat langer gewacht met het sluiten van de inzendtermijn. Dat betekent dat u in deze *Euclides* geen bloemlezing vindt van de ingestuurde oplossingen van Doordenker 1 en Doordenker 2.
In het volgende nummer van *Euclides* zullen de puzzelredacteuren van *Rekenbeter.nl* dat ruimschoots goed maken!

SERVICEPAGINA

Voor overige internet-adressen zie:
www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php
Forum op de NVvW-site:
www.nvvw.nl/forum.html

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren



Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels
31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek
32. Experimenteren met rijen
33. Ontwikkelen met Kettingbreuken

Zie verder ook *www.nvvw.nl/page.php?id=7451* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van *Euclides* (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur, het liefst via e-mail (*dklingens@gmail.com*).
Hieronder staan de verschijningsdata van *Euclides* in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*

jaargang 87

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
4	7 februari 2012	6 dec 2011
5	27 maart 2012	31 jan 2012
6	15 mei 2012	20 maa 2012
7	26 juni 2012	1 mei 2012

2012

zaterdag 7 januari, Utrecht
Wintersymposium: Grootschalig rekenen en gezondheidszorg
Organisatie KWG
Zie pagina 62 in Euclides 87(2).

dinsdag 10 januari, Bunnik
Congres: Toetsen en examineren in het vo
Organisatie Stichting Beroep en Overheid (SBO)

wo 18 t/m vr 20 jan, Noordwijkerhout
30e Panamaconferentie
Organisatie FIsme

dinsdag 24 januari, Ede
3e Jaarcongres vmbo: Praktisch VMBO
Organisatie Actis en Sardes

maandag 30 januari, Utrecht
10e APS wiskundeconferentie
Organisatie APS

vr 3 feb. en za 4 feb, Noordwijkerhout
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie FIsme

woensdag 8 februari, op de scholen
Onderbouw-wiskundedag
Organisatie FIsme
Zie pag. 109 in dit nummer.

maandag 13 februari, Utrecht
Studiedag: De Grote Rekenmeisjesshow
Organisatie APS

maandag 5 maart, Utrecht
Studiemiddag: Rekenen in het vo getoetst
Organisatie APS

woensdag 14 maart, Utrecht
2e Wiskunde C-conferentie
Organisatie cTWO
Zie pag. 122 in dit nummer.

donderdag 15 maart, op de scholen
W4 Kangoeroe
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe

donderdag 29 maart, Zeist
Conferentie: Nationale Rekendag 2012
Organisatie FIsme (Rekenweb)

woensdag 18 april, op de scholen
Grote Rekendag 2012 (De dierenwereld)
Organisatie FIsme (Rekenweb)

donderdag 26 april, Utrecht
NVORWO: jaarvergadering en studiemiddag
Organisatie NVORWO

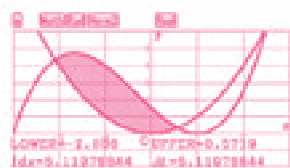
CASIO *fx*-CG20: Kleurrijke wiskunde!

De *fx*-CG20 van CASIO is de eerste van een nieuwe generatie grafische rekenmachines, die dankzij zijn hogeresolutie LCD-kleurenscherm en uitgebreide functionaliteit de ideale studiegenoot is voor iedere scholier of wiskundestudent.

De *fx*-CG20 van CASIO biedt als eerste ter wereld de functie 'Picture Plot' waarmee de gebruiker grafieken en curven over andere beelden heen kan plotten, zoals een parabool over de waterstralen van een fontein. Studenten kunnen experimenteren met het creëren van hun eigen grafieken over foto's heen. Vervolgens leren ze van de functies van deze zelfgemaakte grafieken. Grafieken die in kleur bovendien een stuk gemakkelijker te overzien zijn. Het hogeresolutie LCD-kleurenscherm toont alle beeldmateriaal in 65.000 kleuren en biedt daarmee dezelfde weergave als in een studieboek. De *fx*-CG20 introduceert een geheel nieuwe en meer intuïtieve manier van wiskunde leren.

Bekijk het in kleur op www.casio-educatie.nl





CASIO: betrouwbaar als de uitkomst zelf!

Op de Natural Textbook Display worden o.a. breuken en wortels weergegeven als in het leerboek. De *fx*-82ES Plus is ook geschikt voor het gebruik van tabellen.



CASIO *fx*-9860GII

Rekengemak:
de grafische rekenmachine *fx*-9860GII met groot contrastrijk display met natuurlijke invoer en uitvoer, achtergrondverlichting en 1,5 MB Flash-ROM-geheugen.



CASIO *fx*-82ES PLUS

Geniale oplossing:
de technisch-wetenschappelijke zakrekenmachine *fx*-82ES Plus met natuurlijke invoer- en uitvoerfunctie, en met puntmatrixscherm zorgt voor meer begrip tijdens het onderwijs.

3 jaar garantie

Bestel nu uw speciaal geprijsde docentenexemplaar van de Casio rekenmachines via e-mail educatie@casio.nl

CASIO. dé nummer 1 in rekenmachines voor het onderwijs.

Casio Benelux B.V. - Tel: 020 545 10 70 - educatie@casio.nl - www.casio-educatie.nl